Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Proff. F. Bottacin, C. Delizia

Primo Appello — 8 gennaio 2009

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e fare **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Mat. Discreta e Logica Matem. (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**

Esercizio 1. (a) Si scriva la tavola di verità della seguente formula ben formata e si determini se essa è una tautologia:

$$P = (\neg A \to \neg B) \wedge (B \to (A \to B))$$

(b) Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.
(c) Si scriva una formula ben formata Q che abbia la seguente tavola di verità:

A	B	C	Q
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Esercizio 2. Si determinino una formula in forma normale congiuntiva ed una in forma normale disgiuntiva equivalenti alla seguente formula ben formata:

$$(A \to \neg B) \wedge \neg(B \to A \wedge C) \vee (C \to A)$$

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$\exists x\, A(x) \wedge \neg\exists y\, B(y) \to (\neg\forall x\, A(x) \to \forall y\, B(y))$$

Esercizio 4. (a) Si dimostri che, dati tre insiemi qualsiasi A, B e C, si ha:

$$(A \triangle B) \setminus (A \cap C) = \big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup (B \setminus A)$$

(b) Si dimostri che:

$$A \cap B = \emptyset,\ \forall B \quad \Leftrightarrow \quad A = \emptyset$$

Esercizio 5. Si individui il più piccolo intero positivo n che si rappresenta in base 7 con 5 cifre a due a due distinte, e si rappresenti n in base 8.

Esercizio 6. Si considerino le applicazioni:

$$h : x \in 5\mathbb{N} \longmapsto \frac{x}{5} + 1 \in \mathbb{N}, \qquad k : t \in \mathbb{N} \longmapsto 4|t-1| \in 4\mathbb{N}.$$

- Si calcoli:

  $h(10\mathbb{N}^*) =$
  $h^{-1}(\{0, 2, 8, 11\}) =$
  $k(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) =$
  $k^{-1}(4\mathbb{N} \setminus \{0, 4, 12\}) =$

- Si stabilisca se h è suriettiva.

- Si stabilisca se k è iniettiva.

- Si determini la composta $k \circ h$.

- Si verifichi che $k \circ h$ è biettiva e se ne individui l'inversa.

Esercizio 7. Nell'anello $M_2(\mathbb{Z}_6)$ delle matrici quadrate di ordine 2 su $\mathbb{Z}_6$ si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_6 \right\}.$$

- Si dimostri che A è un sottoanello unitario di $M_2(\mathbb{Z}_6)$.

- Si determinino tutti gli elementi invertibili di A.

Esercizio 8. Nell'insieme $A = \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$ dei numeri naturali minori di 12 si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 5a < 2b.$$

- Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in A.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \sqsubseteq)$.

- Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è ben ordinato.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di $(A, \sqsubseteq)$.

- Si determinino tutti i maggioranti in A del sottoinsieme $\{1, 2\}$.

- Si determini l'eventuale estremo superiore in A del sottoinsieme $\{1, 2\}$.

Esercizio 9. Si determini il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{Z}_5).$$

Esercizio 10. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

si determinino, se esistono, una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 11. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v = (2, -1, 1), \qquad w = (3, 2, -1).$$

Si dimostri che v e w sono linearmente indipendenti e si trovi un vettore u tale che i tre vettori u, v e w formino una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 12. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (2, -1, 0), \qquad B = (4, 2, 1), \qquad C = (3, -1, 2).$$

- Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B.
- Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per C e perpendicolare alla retta r.