Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Primo Appello — 12 gennaio 2010

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**
☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**

Esercizio 1.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = A \vee (B \to \neg A) \to \neg B \wedge A.$$

  Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è soddisfacibile.

  Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\vee$.

- Si stabilisca se le formule ben formate $(A \vee B) \vee C$ e $A \vee (B \vee C)$ sono equivalenti.

Esercizio 2. Si determinino una formula in forma normale congiuntiva ed una in forma normale disgiuntiva equivalenti alla seguente formula ben formata:

$$Q = (C \to \neg B \vee A) \wedge (\neg A \to B).$$

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$R = \exists x A(x) \vee \forall y B(y) \to \neg \exists x C(x) \wedge A(y).$$

Esercizio 4. Si dimostri che, dati tre insiemi qualsiasi A, B e C, si ha:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Esercizio 5. Si consideri l'applicazione

$$f : n \in \mathbb{N} \longrightarrow [2n]_5 \in \mathbb{Z}_5.$$

- Si calcoli:

  $f(5\mathbb{N}) =$

  $f^{-1}(\{[3]_5\}) =$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Considerata l'applicazione $g : \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ definita ponendo

$$\begin{cases} g([0]_5) = g([1]_5) = g([2]_5) = g([3]_5) = [1]_6 \\ \\ g([4]_5) = [2]_6 \end{cases}$$

  si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

Esercizio 6. Si consideri l'insieme $S = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} \subset \mathbb{N}$.

- Si determini la rappresentazione binaria di ogni elemento di S.

Per ogni $a \in S$ si denoti con $\sigma(a)$ la somma delle cifre della rappresentazione binaria di a. Si consideri in S la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo:

$$a \,\mathcal{R}\, b \iff \sigma(a) = \sigma(b).$$

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza in S.

- Si descrivano le seguenti classi di equivalenza:

  $[8]_{\mathcal{R}} =$

  $[9]_{\mathcal{R}} =$

  $[10]_{\mathcal{R}} =$

- Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $S/\mathcal{R}$?

Esercizio 7. Con le stesse notazioni dell'esercizio precedente, nell'insieme S si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo:

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } \sigma(a) < \sigma(b).$$

- Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in S.

- Si stabilisca se $(S, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(S, \sqsubseteq)$.

- Si stabilisca se $(S, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di $(S, \sqsubseteq)$.

- Si consideri il sottoinsieme $T = \{8, 9, 10, 11, 12, 15\}$ di S. Si dimostri che $(T, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

- Motivando la risposta, si stabilisca se il reticolo $(T, \sqsubseteq)$ è distributivo.

Esercizio 8.

- Si determini il gruppo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$ degli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$.

- Si scriva la tavola di moltiplicazione di $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$ è una parte stabile di $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

Esercizio 9. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z}_7).$$

Esercizio 10. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7).$$

- Si determinino tutti gli autovalori e gli autovettori di A su $\mathbb{Z}_7$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile su $\mathbb{Z}_7$.

- Si individuino gli autospazi relativi a ciascun autovalore, precisandone una base e la dimensione.

Esercizio 11. Si stabilisca se i tre vettori

$$v_1 = (1, 0, 3), \qquad v_2 = (-1, 2, 0), \qquad v_3 = (-3, 4, -3)$$

formano una base di $\mathbb{R}^3$. Altrimenti si esprima uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

Esercizio 12. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (1, 1, 1), \qquad B = (1, 0, 2), \qquad C = (-1, 1, 0).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non appartengono alla stessa retta.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C.

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha' - 2\beta' \\ y = -2 + \beta' \\ z = 1 - \alpha' + \beta' \end{cases}$$

  con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.