Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola __________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Primo Appello — 26 gennaio 2011

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti** (3 ore)
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** (2 ore)
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12** (30 minuti)
☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti tranne il numero 12** (3 ore)

In quale di questi giorni preferireste sostenere l'esame orale? Barrare una casella.
☐ martedì 01/02 ☐ mercoledì 02/02 ☐ mercoledì 16/02 ☐ lunedì 28/02

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n > 2$ risulta

$$n^2 > 2n + 1.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $g : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longmapsto (x + 1)y \in \mathbb{Z}$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se g è suriettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se g è iniettiva.

- Considerata l'applicazione $h : z \in \mathbb{Z} \longmapsto (1, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si determini l'applicazione composta $g \circ h$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ h$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{Z}_7).$$

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $A = \{20, \dots, 30\}$ dei numeri naturali compresi tra 20 e 30. Per ogni $a \in A$ sia $\sigma(a)$ la più grande tra le cifre della rappresentazione di a in base 4. Si consideri poi la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ in A definita ponendo

$$a \, \mathcal{R} \, b \iff \sigma(a) = \sigma(b).$$

Si determini la partizione di A individuata dalla relazione $\mathcal{R}$.

Esercizio 5. Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri interi $a = 737$ e $b = 814$, e si individuino due interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 6. Si considerino l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e l'operazione interna $\star$ definita ponendo

$$a \star b \; = \; a + b + ab.$$

- Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, \star)$ è un monoide commutativo.

- Quali sono gli elementi simmetrizzabili del monoide $(\mathbb{Q}, \star)$?

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(\mathbb{N}_0, \star)$ è un sottomonoide di $(\mathbb{Q}, \star)$.

Esercizio 7. Si considerino gli insiemi $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Quante sono le applicazioni non iniettive di A in B ?

- Quante sono le applicazioni iniettive di B in A ?

- Considerato l'insieme $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, quante sono le applicazioni suriettive di A in C ?

Esercizio 8. Si consideri l'insieme $D = \{1, 2, 3\}$. Nell'insieme $D \times D$ si consideri la relazione d'ordine $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \iff a|c \ \text{ e } \ b \leq d,$$

dove $|$ e $\leq$ denotano rispettivamente la relazione del *divide* e l'ordine *usuale* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(D \times D, \sqsubseteq)$.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $(D \times D, \sqsubseteq)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(D \times D, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5).$$

- Si determinino tutti gli autovalori e i relativi autovettori di A su $\mathbb{Z}_5$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile su $\mathbb{Z}_5$.

- Si individuino gli autospazi relativi a ciascun autovalore, precisandone una base e la dimensione.

Esercizio 10. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, e l'applicazione

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (0, x + y, x + z, y - z) \in \mathbb{R}^4.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo K di f.

- Si determinino la dimensione di K e una sua base.

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (0, 1, 0), \qquad B = (0, 1, -1), \qquad C = (2, 1, 1).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non appartengono alla stessa retta.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C.

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + \alpha' \\ y = \beta' \\ z = \alpha' - \beta' \end{cases}$$

  con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.

Esercizio 12.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = C \vee (D \to \neg C) \to C \wedge D.$$

  Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è soddisfacibile.

- Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\vee$.

- Giustificando la risposta, si stabilisca se le formule ben formate $(A \vee \neg A) \to (B \vee \neg B)$ e $A \wedge \neg A$ sono equivalenti.

- Si scriva una formula in forma normale congiuntiva equivalente a $B \vee \neg B$ e una in forma normale disgiuntiva equivalente a $A \wedge \neg A$.