Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Preappello — 10 gennaio 2012

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n > 1$ risulta

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1+n}{2n}.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definita ponendo $f(x) = (x+1)(x-1)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Considerata l'applicazione $g : n \in \mathbb{N}_0 \longmapsto n+2 \in \mathbb{N}$, si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z}_{11}).$$

Esercizio 4. Siano A un insieme non vuoto e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in A. Con $a, b \in A$ si dimostri che

$$a \,\mathcal{R}\, b \iff [a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}.$$

Esercizio 5. Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri interi $a = -715$ e $b = 1001$, e si individuino due interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 6. Si considerino l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi e l'operazione interna $\star$ definita ponendo

$$a \star b = a(b + 1).$$

- Si stabilisca se l'operazione $\star$ è commutativa.

- Si stabilisca se l'operazione $\star$ è associativa.

- Si determini l'eventuale elemento neutro della struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \star)$.

- Si determinino gli eventuali elementi simmetrizzabili della struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \star)$.

Esercizio 7.

- Quante sono le applicazioni non iniettive di $\mathbb{Z}_4$ in $\mathbb{Z}_6$?

- Quante sono le applicazioni iniettive di $\mathbb{Z}_6$ in $\mathbb{Z}_4$?

- Considerato l'insieme $C = \{a, b, c, d, e, f\}$, quante sono le applicazioni suriettive di C in $\mathbb{Z}_6$?

Esercizio 8. Si consideri l'insieme $A = \{0, 1, 2\}$. Nell'insieme $A \times A$ si consideri la relazione d'ordine $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \iff a \leq c \text{ e } b | d,$$

dove $|$ e $\leq$ denotano rispettivamente la relazione del *divide* e l'ordine *usuale* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(A \times A, \sqsubseteq)$.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $(A \times A, \sqsubseteq)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A \times A, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7).$$

- Si determinino tutti gli autovalori e i relativi autovettori di A su $\mathbb{Z}_7$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile su $\mathbb{Z}_7$.

- Si individuino gli autospazi relativi a ciascun autovalore, precisandone una base e la dimensione.

Esercizio 10. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, e l'applicazione

$$f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (x, 2x, 3x, y + z + t) \in \mathbb{R}^4.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo K di f.

- Si determinino la dimensione di K e una sua base.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (1,1,1), \qquad B = (-2,-1,1), \qquad C = (0,1,0).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non appartengono alla stessa retta.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C.

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + \beta' \\ y = -\alpha' \\ z = 1 + \alpha' - 2\beta' \end{cases}$$

  con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.

Esercizio 12.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = (C \to \neg D \wedge C) \vee D.$$

  Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è soddisfacibile.

- Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

- Giustificando la risposta, si stabilisca se le formule ben formate $A \wedge \neg A \to (B \wedge \neg A \to \neg B \vee C \wedge D)$ e $A \vee \neg A$ sono equivalenti.

- Si scriva una formula in forma normale congiuntiva equivalente a $B \wedge \neg B$ e una in forma normale disgiuntiva equivalente a $A \wedge \neg A$.