Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Preappello — 8 gennaio 2013

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Con $A = \{x \in \mathbb{N}_0 : x < 8\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : 5 \leq x \leq 9\}$, si determinino i seguenti insiemi elencandone gli elementi:

- $A \cup B =$
- $A \cap B =$
- $A \setminus B =$
- $A \dot{\cup} B =$

Esercizio 2. Si consideri le applicazioni

$$f : x \in \mathbb{Z} \longmapsto |2x| + 1 \in \mathbb{N}_d, \qquad g : y \in \mathbb{N}_d \longmapsto \frac{y+1}{2} \in \mathbb{N}.$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.
- Motivando la risposta, si stabilisca se g è suriettiva.
- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.
- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.
- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_9)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quante e quali sono le relazioni di equivalenza in A aventi tutte le classi di equivalenza di ordine pari?

Esercizio 5. Si determinino un intero positivo e un intero negativo soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 14x \equiv 7 \pmod{21} \\ 16x \equiv 8 \pmod{28} \\ 4x \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

Esercizio 6. Si considerino l'insieme $\mathbb{Z}$ e l'operazione interna $\star$ definita ponendo $a \star b = |ab|$.

- Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \star)$ è un semigruppo commutativo.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(\mathbb{Z}, \star)$ è un monoide.

- Si determini un sottoinsieme proprio di $(\mathbb{Z}, \star)$ che sia un monoide.

- Si stabilisca se $\{-1, 0, 1\}$ è una parte stabile di $(\mathbb{Z}, \star)$, ed in caso affermativo se ne scriva la tabella moltiplicativa.

Esercizio 7. Descrivendo il procedimento utilizzato per ottenere la risposta, si precisi quanti sono i numeri interi positivi ≤ 100 divisibili per almeno uno tra 2 e 3, ma non per 5.

Esercizio 8. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, e si consideri il reticolo $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è distributivo.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è booleano.

Esercizio 9. Si determinino **tutte** le soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + z = 3 \\ 3x + y + z = 2. \end{cases}$$

Esercizio 10. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sul campo $\mathbb{R}$ si considerino i vettori

$$v_1 = (2, 0, 0, 1), \quad v_2 = (0, 1, 1, 1), \quad v_3 = (0, 1, 1, 0), \quad v_4 = (1, 0, 0, 0).$$

Si provi che tali vettori sono linearmente dipendenti, e si scriva uno di essi come combinazione lineare dei rimanenti.

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale si consideri il piano π di equazione cartesiana

$$x + 5y - 2z + 3 = 0.$$

ed i punti $A = (-1, 2, 0)$, $B = (1, 1, -2)$ e $C = (0, -1, -1)$.

- Si determinino le coordinate del punto P di intersezione tra il piano π e la retta r passante per i punti A e B.

- Si determinino le equazioni parametriche della retta s passante per i punti A e C, e si stabilisca se il punto B appartiene alla retta s.

- Si stabilisca se il piano π e la retta s sono paralleli o incidenti.

Esercizio 12. Si consideri le formule ben formate

$$P = A \vee \neg B \to B \wedge C, \qquad Q = P \wedge \neg A \to C.$$

- Si stabilisca se Q è una tautologia.

- Si scriva una formula in forma normale disgiuntiva equivalente a P.

- Si scriva una formula equivalente a Q usando solo i connettivi $\neg$ e $\vee$.