

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Preappello — 7 gennaio 2014

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

- Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
 - Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
 - Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
 - Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**
-

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n > 0$ risulta

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{3x}{4} \in \mathbb{Q}$$

$$g : y \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{|y|}{3} \in \mathbb{Q}.$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.
- Motivando la risposta, si stabilisca se g è iniettiva.
- Si determini la controimmagine $g^{-1}(\mathbb{Z})$.
- Si determini l'applicazione composta $f \circ g$.
- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ g$ è iniettiva.
- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ g$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{Z}_3).$$

Esercizio 4. Si determinino due soluzioni intere (una positiva, l'altra negativa) del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 100x \equiv 95 \pmod{405} \\ 6x \equiv 9 \pmod{15}. \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$.

- Quante sono le relazioni nell'insieme A ?

- Quante sono le relazioni di equivalenza in A ?

- Quante e quali sono le relazioni di equivalenza \mathcal{R} in A tali che $(a, b) \in \mathcal{R}$, $(a, c) \in \mathcal{R}$, $(a, d) \notin \mathcal{R}$?

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali positivi che hanno rappresentazione in base 9 costituita da sei cifre tra cui due sono 0 e due sono 1.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

- Si determinino tutti gli autovalori di A , i corrispondenti autospazi e le relative dimensioni.

- Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si risolva il seguente sistema lineare su \mathbb{Z}_5 , esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} x + y + 3t = 3 \\ 2x + 2z + 3t = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 2 \\ 4x + 3y + z + 2t = 3 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale sia data la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

e siano dati i punti

$$C = (2, -1, -3), \quad D = (0, 2, 3).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche della retta r' per i punti C e D .

- Si verifichi se le rette r e r' sono parallele, incidenti o sghembe.

Esercizio 12.

- Si stabilisca il valore di verità della seguente proposizione:

Se 3 è un numero primo o $\text{MCD}(2, -4) = 2$, allora esistono infiniti numeri primi.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = A \wedge B \vee \neg B \rightarrow A.$$

Si scriva la tavola di verità di P .

Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi \neg e \wedge .

- Si determinino una formula in forma normale congiuntiva e una formula in forma normale disgiuntiva equivalenti a P .