Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Docente: C. Delizia

Preappello — 8 gennaio 2015

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n > 0$ risulta

$$4 \sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2.$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni

$$f : n \in \mathbb{N} \longmapsto \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \qquad\qquad g : x \in \mathbb{Q} \longmapsto x + \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}.$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se g è suriettiva.

- Si determini la controimmagine $g^{-1}(\mathbb{Z})$.

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_4)$$

è invertibile, e in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 86x \equiv 14 \pmod{444} \\ 3x \equiv 9 \pmod{25}. \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si consideri la relazione

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (3,1), (3,3), (3,5), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,4), (6,6)\}.$$

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.

- Quali sono gli elementi di $[1]_{\mathcal{R}}$?

- Si descriva la partizione di A indotta da $\mathcal{R}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali **pari** che hanno rappresentazione binaria costituita da otto cifre tra cui almeno quattro sono 1.

Esercizio 7. Nell'insieme $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$ dei numeri naturali minori di 10 si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 4a < 3b.$$

- Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in A.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \sqsubseteq)$.

- Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di $(A, \sqsubseteq)$.

- Si determini l'eventuale estremo superiore in A del sottoinsieme $\{3, 4\}$.

- Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

Esercizio 8. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si consideri l'operazione interna $\star$ definita ponendo

$$a \star b = a + b + 5.$$

Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \star)$ è un gruppo abeliano, **evidenziando** in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

- Si determinino tutti gli autovalori di A, i corrispondenti autospazi e le relative dimensioni.

- Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si risolva il seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_5$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ \phantom{3x + {}} y + 3z = 4 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine bidimensionale siano dati i punti

$$A = (3, 2), \qquad B = (-1, 0).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche della retta r per i punti A, B.

- Si scriva l'equazione cartesiana della retta r' per i punti $C = (-2, 1)$, $D = (2, 3)$.

- Si stabilisca se le rette r e r' sono parallele.

Esercizio 12. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, e l'applicazione

$$f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (x_1 - x_2, x_2, x_3 + x_4) \in \mathbb{R}^3.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo di f e la sua dimensione.

- Si determini l'immagine di f e la sua dimensione.