Cognome Nome Matricola

MATEMATICA DISCRETA

DOCENTE: C. DELIZIA

Preappello — 8 gennaio 2015

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

- □ Matematica Discreta (9 cfu) Esercizi: tutti
- \Box Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) Esercizi: tutti
- \Box Matematica Discreta (6 cfu) Esercizi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
- \Box Integrazione di esami già sostenuti Chiedere al docente

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni n > 0 risulta

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2.$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni

$$f:n\in\mathbb{N}\longmapsto\frac{1}{n}\in\mathbb{Q}\qquad \qquad g:x\in\mathbb{Q}\longmapsto x+\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}.$$

 \bullet Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

 $\bullet\,$ Motivando la risposta, si stabilisca se g è suriettiva.

• Si determini la controimmagine $g^{-1}(\mathbb{Z})$.

 $\bullet\,$ Si determini l'applicazione composta $g\circ f.$

 \bullet Motivando la risposta, si stabilisca se $g\circ f$ è iniettiva.

 $\bullet\,$ Motivando la risposta, si stabilisca se $g\circ f$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_4)$$

è invertibile, e in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni congruenziali:

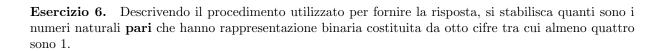
$$\begin{cases} 86x \equiv 14 \pmod{444} \\ 3x \equiv 9 \pmod{25}. \end{cases}$$

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (3,1), (3,3), (3,5), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,4), (6,6)\}.$$

 $\bullet\,$ Si dimostri che ${\mathcal R}$ è una relazione di equivalenza.

• Quali sono gli elementi di $[1]_{\mathcal{R}}$?

• Si descriva la partizione di A indotta da \mathcal{R} .



Esercizio 7. Nell'insieme $A=\{1,\,2,\dots,\,9\,\}$ dei numeri naturali minori di 10 si consideri la relazione \sqsubseteq definita ponendo

$$a\sqsubseteq b\iff a=b\text{ oppure }4a<3b.$$

 $\bullet\,$ Si verifichi che \sqsubseteq è una relazione d'ordine in A.

 $\bullet\,$ Si disegni il diagramma di Hasse di $(A,\sqsubseteq).$

- Si stabilisca se (A, \sqsubseteq) è totalmente ordinato.
- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di (A, \sqsubseteq) .
- Si determini l'eventuale estremo superiore in A del sottoinsieme $\{3, 4\}$.
- Si stabilisca se (A, \sqsubseteq) è un reticolo.

Esercizio 8. Nell'insieme $\mathbb Z$ dei numeri interi si consideri l'operazione interna \star definita ponendo

$$a \star b = a + b + 5.$$

Si dimostri che la struttura algebrica (\mathbb{Z}, \star) è un gruppo abeliano, **evidenziando** in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

 $\bullet\,$ Si determinino tutti gli autovalori di A,i corrispondenti autospazi e le relative dimensioni.

 \bullet Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si risolva il seguente sistema lineare su \mathbb{Z}_5 , esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ y + 3z = 4 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine bidimensionale siano dati i punti

$$A = (3, 2), \qquad B = (-1, 0).$$

 \bullet Si scrivano le equazioni parametriche della retta r per i punti A,B.

 $\bullet\,$ Si scriva l'equazione cartesiana della retta r' per i punti $C=(-2,1),\ D=(2,3).$

 $\bullet\,$ Si stabilisca se le rette r e r' sono parallele.

Esercizio 12. Si considerino gli spazi vettoriali reali \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 , e l'applicazione

$$f: (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (x_1 - x_2, x_2, x_3 + x_4) \in \mathbb{R}^3.$$

 $\bullet\,$ Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

 $\bullet\,$ Si determini il nucleo di f e la sua dimensione.

 $\bullet\,$ Si determini l'immagine di fe la sua dimensione.