Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Docente: C. Delizia

Preappello — 14 gennaio 2016

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n > 4$ risulta

$$3^{n-1} > 2^{n+1}.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{se } x \in 3\mathbb{Z} \\ x - 1 & \text{se } x \notin 3\mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $f \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ f$ è iniettiva.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Z}_5).$$

Esercizio 4. Si determini la massima soluzione negativa del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 18\,x \equiv 12 \pmod{30} \\ 20\,x \equiv 16 \pmod{24} \\ 24\,x \equiv 18 \pmod{42} \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali positivi si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$a \,\mathcal{R}\, b \iff a + 2b \in 3\mathbb{N}.$$

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.

- Si determini la classe di equivalenza $[1]_{\mathcal{R}}$.

- Si determini l'insieme quoziente $\mathbb{N}/_{\mathcal{R}}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si calcoli quanti sono i numeri naturali positivi ≤ 100 divisibili per almeno uno tra 4, 5 e 6.

Esercizio 7. Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a+1 \mid b+1,$$

dove $\mid$ denota l'ordinamento del *divide* in $\mathbb{N}$.

- Si dimostri che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}$.

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(B, \sqsubseteq)$, dove $B = \{1, 2, 3, \ldots 9\}$ denota l'insieme dei numeri naturali positivi ≤ 9.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$.

Esercizio 8. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si consideri l'operazione binaria $\star$ definita ponendo

$$a \star b = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ b & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.

- Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \star)$ è un semigruppo.

- Si stabilisca se l'operazione $\star$ è commutativa.

- Si stabilisca se la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \star)$ è un monoide.

Esercizio 9. Si determini, se esiste, una matrice $A \in M_3(\mathbb{Z}_3)$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- gli autovalori di A sono 0 e 1;
- la molteplicità algebrica dell'autovalore 0 è 2;
- la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è 1;
- $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ sono autovettori di A relativi all'autovalore 0;
- $(1, 0, 1)$ è autovettore di A relativo all'autovalore 1.

Esercizio 10. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema lineare su $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z + 3t = 1 \\ x + z + 2t = 2 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (0, 1, 2), \qquad B = (2, 3, 5), \qquad C = (1, 2, 4).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non sono allineati.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C.

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2\alpha' - \beta' \\ y = 3 + \beta' \\ z = \alpha' + 3\beta' \end{cases}$$

con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.

Esercizio 12. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^5$, e l'applicazione

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x, 2x, 3x, x + y, 0) \in \mathbb{R}^5.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo di f e la sua dimensione.

- Si determini l'immagine di f e la sua dimensione.