

MATEMATICA DISCRETA

GRUPPO 1 – DOTT. C. DELIZIA

PRIMA PROVA IN ITINERE

20 NOVEMBRE 2002

ESERCIZIO 1. Si considerino gli insiemi $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, d, f, g\}$.

- Si effettuino le seguenti operazioni tra insiemi:

$$A \cup B =$$

$$A \cap B =$$

$$A \setminus B =$$

$$A \triangle B =$$

- Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(A)$?
- Quanti sono i sottoinsiemi di ordine 2 di A ?
- Quanti sono i sottoinsiemi di A aventi ordine al più 3 ?
- Quante sono tutte le possibili applicazioni di A in B ?
- Quante sono tutte le possibili applicazioni iniettive di A in B ?
- Quante sono tutte le possibili applicazioni iniettive di B in A ?
- Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono formare utilizzando tutte le lettere dell'insieme A ?

ESERCIZIO 2. Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono ottenere utilizzando tutte le lettere della parola FOTOCOPIATRICE ?

ESERCIZIO 3. Si considerino le applicazioni

$$f : n \in \mathbb{Z} \mapsto n - 3 \in \mathbb{Z}, \quad g : m \in \mathbb{Z} \mapsto 2|m| \in \mathbb{N}.$$

- Si stabilisca se f è biettiva, ed in caso affermativo se ne individui l'inversa.
- Si stabilisca se g è iniettiva, e se è suriettiva.
- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$; si stabilisca poi se essa è iniettiva, e se è suriettiva.
- Si calcoli:

$$f(\{2, 3\}) =$$

$$f^{-1}(\{2, 3\}) =$$

$$g^{-1}(\{1\}) =$$

$$g^{-1}(\{2, 3\}) =$$

$$(g \circ f)^{-1}(\{16\}) =$$

ESERCIZIO 4. Sia $f : S \rightarrow T$ un'applicazione, e siano $S_1, S_2 \subseteq S$.

- Si dimostri che $f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$.
- Si dimostri con un esempio che in generale $f(S_1 \cap S_2) \neq f(S_1) \cap f(S_2)$.
- Si dimostri che se f è iniettiva allora $f(S_1 \cap S_2) = f(S_1) \cap f(S_2)$.

ESERCIZIO 5. Si dica se la corrispondenza $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$ è un'applicazione di \mathbb{Z} in \mathbb{R} , motivando la risposta.

ESERCIZIO 6. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1).$$

ESERCIZIO 7. Si considerino i numeri interi $a = 4081, b = 2926$.

- Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si calcoli il massimo comun divisore positivo $d = (a, b)$.
- Si determinino poi i coefficienti interi α e β che verificano l'uguaglianza $d = \alpha a + \beta b$.

ESERCIZIO 8. Si determini il più grande tra i numeri naturali che si rappresentano in base 8 con 4 cifre distinte, e lo si esprima sia in base 10 che in base 6.