Matematica Discreta

Gruppo 1 – Gruppo 4

Dott. C. Delizia

Prima Prova in Itinere

17 Novembre 2003

<u>Esercizio 1.</u> Siano A l'insieme dei divisori di -12, B l'insieme dei divisori di 18. Si descrivano gli insiemi A, B e $A \triangle B$.

<u>Esercizio 2.</u> Siano $f : A \longrightarrow B$ un'applicazione, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$. Si dimostri che:

- $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$;
- $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$;
- f è iniettiva $\Longleftrightarrow f^{-1}(f(X)) = X$, per ogni $X \subseteq A$.

<u>Esercizio 3.</u> Per ciascuna delle seguenti corrispondenze, si stabilisca se essa è un'applicazione, motivando la risposta.

- $\mathcal{R}_1 = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{Z} \,:\, x = 4y\}$
- $\mathcal{R}_2 = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{N}_d \times \mathbb{Z} \,:\, x = |y| + 1\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{([x]_3\,,\,[y]_2) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \,:\, x = y\}$

<u>Esercizio 4.</u> Si consideri l'applicazione $h : x \in \mathbb{Q} \longmapsto 6x - 5 \in \mathbb{Q}$.
Si verifichi che h è invertibile, e se ne determini l'inversa.

<u>Esercizio 5.</u> Si considerino le applicazioni

$$f : z \in \mathbb{Z} \longmapsto 2|z| + 3 \in \mathbb{N}, \qquad g : n \in \mathbb{N} \longmapsto n + 7 \in \mathbb{N}.$$

- Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.
- Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.
- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.
- Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva, e perchè.
- Si calcoli:

  $f(\{-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2\}) =$

  $f(2\mathbb{Z}) =$

  $f^{-1}(\{0\,,\,5\,,\,7\,,\,13\}) =$

  $g(\{0\,,\,12\,,\,18\,,\,36\}) =$

  $g^{-1}(\{0\,,\,1\,,\,2\}) =$

  $g^{-1}(\mathbb{N} \setminus \{7\,,\,13\}) =$

  $(g \circ f)(5\mathbb{Z}) =$

  $(g \circ f)^{-1}(\{8\,,\,16\}) =$

<u>ESERCIZIO 6.</u> Si considerino i numeri interi $a = 508, b = 360$.

• Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si calcoli il massimo comun divisore positivo $d = (a, b)$.

• Si determinino i coefficienti interi α e β che verificano l'uguaglianza $d = \alpha a + \beta b$.

• Si calcoli il minimo comune multiplo positivo di a e b.

<u>ESERCIZIO 7.</u> Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 9$ risulta

$$9 + 10 + 11 + \cdots + n = \tfrac{n^2+n-72}{2}.$$

<u>ESERCIZIO 8.</u> Si determinino quoziente e resto della divisione euclidea di -8 per 7.

<u>ESERCIZIO 9.</u> Si scriva l'espressione del numero $(1\,3\,4\,5)_6$ in base 9.

<u>ESERCIZIO 10.</u>

• Quanti numeri naturali si possono esprimere in base 8 nella forma $(\star\star\star\star\star)_8$ utilizzando le cifre 2, 3 e 4 ?

• Quanti sono i numeri naturali che si possono esprimere in base 8 nella forma $(\star\star\star\star\star)_8$ con le prime tre cifre dispari?

• Quanti sono i numeri naturali che si possono esprimere in base 8 nella forma $(\star\star\star)_8$ con cifre tutte dispari e diverse tra loro?

• Quanti sono i numeri naturali che si possono esprimere in base 8 nella forma $(\star\star\star)_8$ con cifre tutte pari e diverse tra loro?

• Quanti sono i numeri naturali che si possono esprimere in base 8 utilizzando esattamente le cifre del numero $(2\,3\,5\,1)_8$?

• Quanti sono i numeri naturali che si possono esprimere in base 8 utilizzando esattamente le cifre del numero $(2\,3\,5\,1\,2\,2\,3\,1)_8$?

<u>ESERCIZIO 11.</u> Sia A un insieme di ordine 7.

• Quanti sono i sottoinsiemi di A ?

• Quanti sono i sottoinsiemi di A aventi ordine 4 ?

• Quanti sono i sottoinsiemi di A aventi ordine almeno 5 ?

<u>ESERCIZIO 12.</u> Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ in $\mathbb{N}$ definita ponendo

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff xy - 4 \text{ è pari.}$$

• Si stabilisca se $\mathcal{R}$ è riflessiva, motivando la risposta.

• Si stabilisca se $\mathcal{R}$ è simmetrica, motivando la risposta.

• Si stabilisca se $\mathcal{R}$ è transitiva, motivando la risposta.

<u>ESERCIZIO 13.</u> Si consideri la relazione $\sim$ in $\mathbb{Z}$ definita ponendo

$$x \sim y \iff x + 9y \text{ è pari.}$$

• Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

• Si calcoli:

$[0]_\sim =$

$[1]_\sim =$

$[2]_\sim =$

• Si descriva l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/_\sim$.