Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Docente: C. Delizia

Preappello — 11 gennaio 2017

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti proposizioni si stabilisca se essa è vera oppure falsa, giustificando la scelta con dimostrazione o controesempio.

- $4\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$

- $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 24\mathbb{Z}$

- $6\mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $f \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ f$ è iniettiva.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{Z}_7).$$

Esercizio 4. Si determini la minima soluzione positiva del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 21\,x \equiv 15 \pmod{60} \\ 10\,x \equiv 8 \pmod{14} \\ 4\,x \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $\mathbb{N}$ si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$a\,\mathcal{R}\,b \Longleftrightarrow ab \geq 3.$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se $\mathcal{R}$ è riflessiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $\mathcal{R}$ è simmetrica.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $\mathcal{R}$ è asimmetrica.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $\mathcal{R}$ è transitiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si calcoli quanti sono i numeri naturali positivi ≤ 200 divisibili per almeno uno tra 6, 7 e 8.

Esercizio 7. Si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita nell'insieme $\mathbb{N}$ ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 7a < b,$$

dove $<$ denota l'usuale ordine stretto su $\mathbb{N}$.

- Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}$.

- Si stabilisca se $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, e perchè.

- Qual è l'estremo inferiore del sottoinsieme $\{14, 19\}$ in $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$?

- Quali sono i maggioranti del sottoinsieme $\{1, 2\}$ in $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$?

- Si dimostri che l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ non è un reticolo.

Esercizio 8. Nell'insieme $\mathbb{N}_0$ si consideri l'operazione binaria $\star$ definita ponendo

$$a \star b = \begin{cases} a & \text{se } a \in \mathbb{N}_p \\ b & \text{se } a \in \mathbb{N}_d \end{cases}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{N}_0$.

- Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{N}_0, \star)$ è un semigruppo.

- Si stabilisca se l'operazione $\star$ è commutativa.

- Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{N}_0, \star)$ non è un monoide.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5).$$

- Si stabilisca se la matrice A è diagonalizzabile.

- In caso affermativo, si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile C tali che $D = C^{-1}AC$.

Esercizio 10. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$, nelle incognite x, y, z e t:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z + t = 1 \\ 3x - z + t = 2 \\ x + z + 2t = 3 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (0, 0, 1), \qquad B = (-1, 1, 2), \qquad C = (1, 0, 1).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non sono allineati.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C.

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \alpha' - 2\beta' \\ y = 3\alpha' - \beta' - 1 \\ z = \alpha' + 2\beta' + 3 \end{cases}$$

  con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.

Esercizio 12. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$, e l'applicazione

$$f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (y - t, 2y, 3z, 0, -y - 2t) \in \mathbb{R}^5.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo di f e la sua dimensione.

- Si determini l'immagine di f e la sua dimensione.