Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Docente: C. Delizia

Secondo appello — 15 febbraio 2017

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1).$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{N}_0$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Assegnata l'applicazione

$$g : x \in \mathbb{N}_0 \longmapsto x+1 \in \mathbb{N},$$

si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Z}_3).$$

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema:

$$\begin{cases} 60x \equiv 75 \pmod{105} \\ 9x \equiv 6 \pmod{11} \\ |x| \leq 200 \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$a \, \mathcal{R} \, b \iff |a - b| \in 3\mathbb{N}_0.$$

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in A.

- Si descriva la partizione di A indotta da $\mathcal{R}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali che hanno rappresentazione binaria costituita da nove cifre con almeno cinque zeri.

Esercizio 7. Si consideri l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$. Disegnandone il diagramma di Hasse, si determinino tutte le relazioni d'ordine $\sqsubseteq$ in A che verificano le suguenti proprietà:

- $\min(A) = a$;
- $\max(A) = e$;
- b e c non sono confrontabili;
- $c \sqsubseteq d$.

Esercizio 8. Si consideri la struttura algebrica costituita dall'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \,:\, n \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

con l'usuale prodotto righe per colonne.

- Si dimostri che A è un monoide commutativo, **evidenziando** in particolare qual è l'elemento neutro e quali sono gli elementi simmetrizzabili.

- Si dimostri che il sottoinsieme
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \,:\, n \in \mathbb{N}_p \right\}$$
è un sottomonoide di A.

Esercizio 9. Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si risolva il seguente sistema lineare su $\mathbb{Q}$ nelle incognite a, b, c, d:

$$\begin{cases} a - b + 3c + d = 2 \\ 2a + b - 4c + d = 1 \\ 2b + 3c + d = 1 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (0, 0, 2), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (2, 1, 1), \quad D = (-1, 1, 0).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche della retta r per i punti A e B.

- Si scriva l'equazione cartesiana della retta r' per i punti C e D.

- Si stabilisca se le rette r e r' sono parallele, incidenti o sghembe.

Esercizio 12. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, e l'applicazione

$$f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (2x_1, 2x_2 + x_3, x_3 + x_4) \in \mathbb{R}^3.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo di f e la sua dimensione.

- Si stabilisca se f è suriettiva.