Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Docente: C. Delizia

Terzo Appello – 27 giugno 2017

DA CODICE ETICO UNISA

`http://web.unisa.it/uploads/rescue/41/76/codice-etico-e-di-comportamento-unisa.pdf`

ART. 43 — VIOLAZIONE DEI DOVERI DEL CODICE – STUDENTI

1. La violazione delle norme del presente Codice da parte degli studenti può dar luogo a sanzioni disciplinari, ai sensi del Regolamento Studenti dell'Ateneo.
2. Quando siano accertate attività tese a modificare indebitamente l'esito delle prove o impedirne una corretta valutazione, il docente o altro preposto al controllo dispone l'annullamento delle prove medesime e la segnalazione al Rettore ai fini dell'attivazione del procedimento disciplinare ai sensi del Regolamento studenti.

DA REGOLAMENTO STUDENTI UNISA

`http://web.unisa.it/uploads/rescue/31/19/reg_studenti_2014_web.pdf`

ART. 40 — SANZIONI DISCIPLINARI A CARICO DEGLI STUDENTI

1. Le sanzioni che si possono comminare sono le seguenti:
   (a) ammonizione;
   (b) interdizione temporanea da uno o più attività formative;
   (c) esclusione da uno o più esami o altra forma di verifica di profitto per un periodo fino a sei mesi;
   (d) sospensione temporanea dall'Università con conseguente perdita delle sessioni di esame.
2. La relativa competenza è attribuita al Senato Accademico, fatto salvo il diritto dello studente destinatario del provvedimento di essere ascoltato.
3. L'applicazione delle sanzioni disciplinari deve rispondere a criteri di ragionevolezza ed equità, avuto riguardo alla natura della violazione, allo svolgimento dei fatti e alla valutazione degli elementi di prova. Le sanzioni sono comminate in ordine di gradualità secondo la gravità dei fatti.
4. La sanzione è comminata con decreto rettorale.
5. **Tutte le sanzioni disciplinari sono registrate nella carriera scolastica dello studente e vengono conseguentemente trascritte nei fogli di congedo.**

Firma leggibile dello studente per presa visione ______________________

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n > 3$ risulta

$$8 + 10 + 12 + \cdots + 2n = n^2 + n - 12.$$

Esercizio 2. Si determini il rango della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7).$$

Esercizio 3. Si considerino le applicazioni

$$f : x \in \mathbb{Z} \longmapsto \frac{x-1}{|x|+1} \in \mathbb{Q}, \qquad g : t \in \mathbb{Z} \longmapsto |t| - 1 \in \mathbb{Z}.$$

- Si calcoli:

  $f(\mathbb{N}_d) =$

  $f^{-1}(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}) =$

- Si stabilisca se f è iniettiva.

- Si stabilisca se f è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $f \circ g$.

- Si stabilisca se $f \circ g$ è iniettiva.

- Si stabilisca se $f \circ g$ è suriettiva.

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema:

$$\begin{cases} 7x \equiv 8 \pmod{15} \\ 6x \equiv 7 \pmod{11} \\ 9x \equiv 6 \pmod{12} \\ |x| \leq 1000 \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, \ldots, 14\}$ dei numeri naturali positivi ≤ 14 si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$a \,\mathcal{R}\, b \iff 2a + b \in 3\mathbb{N}.$$

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in A.

- Si descrivano le seguenti classi di equivalenza:

  $[1]_{\mathcal{R}} =$

  $[2]_{\mathcal{R}} =$

- Si determini la partizione di A individuata da $\mathcal{R}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per ottenere la risposta, si precisi quanti sono i numeri naturali che ammettono in base 8 una rappresentazione di 4 cifre, almeno due delle quali siano zeri.

Esercizio 7. Si consideri l'insieme $A = \{4, 6, 8\}$, e si ponga $B = A \times A$. Nell'insieme B si consideri poi la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \iff \begin{cases} a \leq c \\ b | d \end{cases}$$

dove $\leq$ e $|$ denotano rispettivamente l'ordinamento *usuale* e quello del *divide* in $\mathbb{N}$.

- Si dimostri che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in B.

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(B, \sqsubseteq)$.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $(B, \sqsubseteq)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(B, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

Esercizio 8. Si consideri, nell'insieme $3\mathbb{Z}$, l'operazione $\star$ definita ponendo

$$n \star m = n + m - 9$$

per ogni $n, m \in 3\mathbb{Z}$.

- Si provi che la struttura algebrica $(3\mathbb{Z}, \star)$ è un gruppo abeliano, specificando in particolare l'elemento neutro e il simmetrico di ciascun elemento n in $(3\mathbb{Z}, \star)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se il sottoinsieme $6\mathbb{Z}$ è stabile in $(3\mathbb{Z}, \star)$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- Si determinino gli eventuali autovalori di A.

- Si individui una base e la dimensione di ciascun autospazio di A.

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Applicando il metodo di Gauss-Jordan, si risolva il seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_5$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ x + z = 0 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (2, 2, 2), \qquad B = (0, -1, 2).$$

- Si scrivano le equazioni cartesiane della retta r per i punti A, B.

- Si consideri la retta r' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = -3 \end{cases}$$

con $t' \in \mathbb{R}$ e si stabilisca se le rette r e r' sono parallele, incidenti o sghembe.

Esercizio 12. Si stabilisca se i tre vettori

$$v_1 = (5, 1, 3), \qquad v_2 = (4, 6, 5), \qquad v_3 = (2, 1, 5)$$

formano una base di $(\mathbb{Z}_7)^3$. In caso contrario si esprima uno di essi come combinazione lineare degli altri due.