Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Docente: C. Delizia

Quarto Appello – 11 luglio 2017

DA CODICE ETICO UNISA

http://web.unisa.it/uploads/rescue/41/76/codice-etico-e-di-comportamento-unisa.pdf

ART. 43 — VIOLAZIONE DEI DOVERI DEL CODICE – STUDENTI

1. La violazione delle norme del presente Codice da parte degli studenti può dar luogo a sanzioni disciplinari, ai sensi del Regolamento Studenti dell'Ateneo.
2. Quando siano accertate attività tese a modificare indebitamente l'esito delle prove o impedirne una corretta valutazione, il docente o altro preposto al controllo dispone l'annullamento delle prove medesime e la segnalazione al Rettore ai fini dell'attivazione del procedimento disciplinare ai sensi del Regolamento studenti.

DA REGOLAMENTO STUDENTI UNISA

http://web.unisa.it/uploads/rescue/31/19/reg_studenti_2014_web.pdf

ART. 40 — SANZIONI DISCIPLINARI A CARICO DEGLI STUDENTI

1. Le sanzioni che si possono comminare sono le seguenti:
   (a) ammonizione;
   (b) interdizione temporanea da uno o più attività formative;
   (c) esclusione da uno o più esami o altra forma di verifica di profitto per un periodo fino a sei mesi;
   (d) sospensione temporanea dall'Università con conseguente perdita delle sessioni di esame.
2. La relativa competenza è attribuita al Senato Accademico, fatto salvo il diritto dello studente destinatario del provvedimento di essere ascoltato.
3. L'applicazione delle sanzioni disciplinari deve rispondere a criteri di ragionevolezza ed equità, avuto riguardo alla natura della violazione, allo svolgimento dei fatti e alla valutazione degli elementi di prova. Le sanzioni sono comminate in ordine di gradualità secondo la gravità dei fatti.
4. La sanzione è comminata con decreto rettorale.
5. **Tutte le sanzioni disciplinari sono registrate nella carriera scolastica dello studente e vengono conseguentemente trascritte nei fogli di congedo.**

Firma leggibile dello studente per presa visione ____________

Esercizio 1. Siano A, B e C insiemi arbitrari. Motivando opportunamente le risposte con dimostrazioni o controesempi, si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$;

- $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup C$;

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni

$$f : n \in \mathbb{Z} \longmapsto n^2 - 1 \in \mathbb{Z}\,, \qquad g : m \in \mathbb{Z} \longmapsto |m| + 1 \in \mathbb{N}.$$

- Si stabilisca se f è iniettiva, e se è suriettiva.

- Si stabilisca se esiste l'inversa di g, ed in caso affermativo la si determini.

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$; si stabilisca poi se essa è iniettiva, e se è suriettiva.

- Si calcoli:

  $f(\{2\,,\,5\}) =$

  $f^{-1}(\{2\,,\,5\}) =$

  $g^{-1}(\{1\}) =$

  $g^{-1}(\{1\,,\,2\}) =$

  $(g \circ f)^{-1}(\{4\}) =$

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_9)$$

è invertibile, e in caso affermativo si determini la matrice inversa.

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 9x \equiv 5 \pmod{10} \\ 14x \equiv 8 \pmod{18}. \end{cases}$$

Esercizio 5. Per ogni intero $a > 1$, si denoti con $\sigma(a)$ il più piccolo numero primo che divide a. Sia

$$S = \{10, 11, 12, \ldots, 24, 25\}$$

l'insieme costituito dai numeri interi compresi tra 10 e 25. Si consideri la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ definita in S ponendo

$$a \,\mathcal{R}\, b \iff \sigma(a) = \sigma(b).$$

Si determini la partizione di S individuata da $\mathcal{R}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si calcoli quanti sono i numeri naturali positivi ≤ 200 divisibili per uno e uno solo tra 12 e 15.

Esercizio 7. Sia $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 16, 18, 24, 36, 72\}$, e si consideri l'insieme ordinato $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$.

- Si determinino tutti gli elementi minimali e massimali, e gli eventuali minimo e massimo di $(A, |)$.

- Si determinino:

$\inf_A\{16, 18\} =$

$\sup_A\{4, 6\} =$

Esercizio 8. Si consideri l'insieme

$$G = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_3) : |A| \neq 0\} .$$

Si dimostri che $(G, \cdot)$ è un gruppo non abeliano, dove l'operazione interna $\cdot$ è l'usuale prodotto righe per colonne tra matrici.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3).$$

- Si determinino gli eventuali autovalori di A, e la relativa molteplicità algebrica.

- Si individui una base per ciascun autospazio.

- Si stabilisca se la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si determinino esplicitamente tutte le soluzioni del seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_3$, nelle incognite a, b, c, d, e:

$$\begin{cases} 2a + b + 2c = 1 \\ 2d + e = 1 \\ a + e = 2 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (0, 2, 1), \qquad B = (1, 2, 2), \qquad C = (0, 3, 3).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non sono allineati.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C.

- Considerato il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \alpha' + \beta' \\ y = \beta' \\ z = 1 + 2\alpha' \end{cases}$$

  con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.

Esercizio 12. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$, e l'applicazione

$$f : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (a + b, a - c, c) \in \mathbb{R}^3.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Determinando il nucleo e l'immagine di f, si dimostri che f è biettiva.