Matematica Discreta

Gruppo 1 – Dott. C. Delizia

Anno Accademico 2002/2003

Primo Appello – 6 febbraio 2003

Esercizio 1. Siano S l'insieme dei numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 4 del tipo $(a\ b\ c)_4$ con $a > 0$, e T il sottoinsieme di S costituito dagli elementi di S che si rappresentano in base 4 con cifre tutte distinte.

1.1.1. Si determini l'ordine di S.

1.1.2. Quanti sono i sottoinsiemi di ordine 10 di S?

1.1.3. Si determini l'ordine di T.

1.1.4. Si indichi qual è il massimo tra gli elementi di S nell'ordinamento indotto da quello naturale di $\mathbb{N}$, dandone la rappresentazione sia in base 4 che in base 10.

1.1.5. Si indichi qual è il massimo tra gli elementi di T nell'ordinamento indotto da quello naturale di $\mathbb{N}$, dandone la rappresentazione sia in base 4 che in base 10.

1.1.6. Si indichi qual è il minimo tra gli elementi di T nell'ordinamento indotto da quello naturale di $\mathbb{N}$, dandone la rappresentazione sia in base 4 che in base 10.

1.1.7. Quanti sono gli elementi di S che si possono ottenere utilizzando le cifre del numero $(1\ 2\ 2)_4$?

1.2.1. Si dimostri che la posizione

$$f((a\,b\,c)_4) = a + b + c$$

definisce un'applicazione $f : S \to \mathbb{N}$.

1.2.2. Si dica se f è iniettiva, e perché.

1.2.3. Si dica se f è suriettiva, e perché.

1.2.4. Si calcoli:
$f(S) =$
$f(T) =$
$f^{-1}(0) =$
$f^{-1}(1) =$
$f^{-1}(\{9,\ 10\}) =$

1.2.5. Si consideri l'applicazione

$$g : n \in \mathbb{N} \mapsto n - 1 \in \mathbb{N}.$$

Si determini l'applicazione composta $g \circ f$, e si stabilisca se essa è iniettiva, suriettiva, biettiva.

Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita in S ponendo

$$(a\,b\,c)_4\,\mathcal{R}\,(x\,y\,z)_4 \iff a = x.$$

1.3.1. Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in S.

1.3.2. Si descriva la generica classe di equivalenza modulo $\mathcal{R}$
$[(a\,b\,c)_4]_{\mathcal{R}} =$

1.3.3. Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $S/\mathcal{R}$?

Se n ed m sono numeri naturali, si denoti con $n \star m$ il massimo dell'insieme $\{n\,,\,m\}$ nell'ordinamento naturale di $\mathbb{N}$.

1.3.4. Si dimostri che la posizione
$$(a\;b\;c)_4 \perp (x\;y\;z)_4 \;=\; (a \star x \quad b \star y \quad c \star z)_4,$$
definisce un'operazione interna $\perp$ in S.

1.3.5. Si dimostri che $(S, \perp)$ è un monoide commutativo.

1.3.6. Quali sono gli elementi invertibili del monoide $(S, \perp)$?

1.3.7. Si provi che la relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ definita all'inizio di pagina 3 è compatibile con l'operazione $\perp$ in S.

1.3.8. Si dimostri che T non è una parte stabile di $(S, \perp)$.

Si consideri in S la relazione $\preceq$ definita ponendo
$$(a\;b\;c)_4 \preceq (x\;y\;z)_4 \;\Leftrightarrow\; a \leq x,\, b \leq y,\, c \leq z,$$
dove $\leq$ è la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

1.4.1. Si dimostri che $\preceq$ è una relazione d'ordine in S.

1.4.2. Si precisi se $(S, \preceq)$ è totalmente ordinato, e perché.

1.4.3. Si precisi se $(S, \preceq)$ è ben ordinato, e perché.

1.4.4. Si dimostri che $(S, \preceq)$ è un reticolo.

1.4.5. Si dimostri che l'applicazione f definita al punto 1.2.1 è un omomorfismo di insiemi ordinati tra $(S, \preceq)$ ed $(\mathbb{N}, \leq)$.

1.4.6. Si dimostri che l'applicazione f definita al punto 1.2.1 non è un omomorfismo di reticoli tra $(S, \preceq)$ ed $(\mathbb{N}, \leq)$.

1.4.7. Si specifichi se esistono, e quali sono, il minimo ed il massimo di $(S, \preceq)$.

1.4.8. Si dica se T è un sottoreticolo di S, motivando la risposta.

1.4.9. Si dimostri che T non possiede minimo né massimo.

1.4.10. Si disegni il diagramma di Hasse del sottoinsieme $\{16\,,\,17\,,\,18\,,\,19\,,\,20\,,\,21\}$ di S.

Esercizio 2. Utilizzando il teorema cinese del resto, si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali, determinandone tutte le soluzioni intere $200 \leq a \leq 500$:

$$\begin{cases} 2a \equiv 6 \ (\text{mod. } 10) \\ 3a \equiv 15 \ (\text{mod. } 21) \\ 4a \equiv 28 \ (\text{mod. } 32). \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

3.1. Si stabilisca se A è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

3.2. Si dimostri per induzione su n che $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 4. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{13}$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 13:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ \;\; x + 7y = 5 \end{cases}$$