Matematica Discreta

Gruppo 1 – Gruppo 4

Dott. C. Delizia

Primo Appello

11 Febbraio 2004

Esercizio 1. Si considerino i numeri interi $a = 765$, $b = 567$.

• Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si calcoli il massimo comun divisore positivo $d = (a, b)$.

• Si determinino i coefficienti interi α e β che verificano l'uguaglianza $d = \alpha a + \beta b$.

• Si calcoli il minimo comune multiplo positivo di a e b.

Esercizio 2. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$\sum_{i=1}^{n}(4i+3) = 2n^2 + 5n.$$

Esercizio 3. Si determini il più piccolo intero positivo che si rappresenta in base 7 con 5 cifre distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 6.

Esercizio 4. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{17}$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 17:

$$\begin{cases} 12x + 4y = 9 \\ 11x - 3y = 14 \end{cases}$$

Esercizio 5.

• Quante diverse parole, non necessariamente di senso compiuto, è possibile ottenere anagrammando la parola LIBRO ?

• Quante diverse parole, non necessariamente di senso compiuto, è possibile ottenere anagrammando la parola STUDENTE ?

• Quante sono le parole, non necessariamente di senso compiuto, costituite da una, due o tre lettere distinte dell'alfabeto italiano?

Esercizio 6. Si dica se la corrispondenza $\mathcal{R} = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, x = 4y^2\}$ è un'applicazione, motivando la risposta.

<u>ESERCIZIO 7.</u> Si considerino le applicazioni

$$f : z \in \mathbb{Z} \longmapsto (z+3)^2 \in \mathbb{N}\,, \qquad g : n \in \mathbb{Z} \longmapsto 1-n \in \mathbb{Z}.$$

• Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.
• Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.
• Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.
• Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.
• Si determini l'applicazione composta $f \circ g$.
• Si stabilisca se $f \circ g$ è iniettiva, e perchè.
• Si stabilisca se $f \circ g$ è suriettiva, e perchè.
• Si calcoli:

$f(\{0\,,\,1\,,\,-1\}) =$
$f^{-1}(\{16\}) =$
$g(\mathbb{N}_d) =$
$g^{-1}(\mathbb{N}_d) =$
$(f \circ g)^{-1}(\{5\,,\,7\}) =$

<u>ESERCIZIO 8.</u> Si consideri l'operazione $\star$ definita ponendo $a \star b \;=\; a+b+2$, per ogni $a,\, b \in \mathbb{Z}_6$.
• Si scriva la tabella moltiplicativa di $(\mathbb{Z}_6, \star)$.
• Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Z}_6, \star)$ è un gruppo abeliano, evidenziando in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Z}_6$.
• Si dimostri che l'applicazione

$$\sigma \;:\; a \in \mathbb{N} \;\mapsto\; a+4 \in \mathbb{Z}_6$$

è un omomorfismo di monoidi tra $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{Z}_6, \star)$.

<u>ESERCIZIO 9.</u> Si consideri la relazione $\sim$ in $\mathbb{N}$ definita ponendo

$$x \sim y \iff x^2 - y^2 \text{ è multiplo di } 5.$$

• Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
• Si calcoli:

$[0]_\sim =$
$[1]_\sim =$
$[2]_\sim =$
$[3]_\sim =$
$[4]_\sim =$

• Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $\mathbb{N}/_\sim$?
• Si dimostri che l'assegnazione $\omega \;:\; [a]_\sim \in \mathbb{N}/_\sim \;\mapsto\; [2a]_\sim \in \mathbb{N}/_\sim$ definisce un'applicazione.
• Si dimostri che ω è iniettiva.

<u>ESERCIZIO 10.</u> Si consideri l'insieme $S = \{1\,,\,2\,,\,4\,,\,8\,,\,11\,,\,22\,,\,44\,,\,88\}$.
• Si dimostri che $(S,\, |)$ è un reticolo, dove $|$ denota la usuale relazione del *divide* tra numeri naturali.
• Si disegni il diagramma di Hasse di $(S,\, |)$.
• Si stabilisca se $(S,\, |)$ è totalmente ordinato, e perchè.
• Nel reticolo $(S,\, |)$ si effettuino i seguenti calcoli:

$8 \vee 22 =$
$8 \wedge 22 =$

• Sia $T \;=\; S \setminus \{1\,,\,88\}$. Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di $(T,\, |)$.
• Sia $U = \{2\,,\,4\,,\,22\}$. Si determinino tutti i maggioranti di U in S.