

MATEMATICA DISCRETA

DOTT. C. DELIZIA

PRIMO APPELLO

9 FEBBRAIO 2005

Esercizio 1. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 2. Si determini il minimo intero positivo *dispari* a tale che simultaneamente risulti $3a \equiv 21 \pmod{27}$ e $3a \equiv 15 \pmod{33}$.

Esercizio 3. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_{11} , esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 11:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4.

- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star 3 \star \star)_8$?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star 3 \star \star)_8$ con cifre tutte distinte?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star 3 \star \star)_8$ con cifre tutte dispari?
- Qual è il maggiore di essi?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star 3 \star \star)_8$ con cifre tutte dispari e distinte?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star 3 \star \star)_8$ utilizzando tre volte la cifra 1 e tre volte la cifra 3?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star 3 \star \star)_8$ utilizzando le sole cifre 1 e 3, e ciascuna di esse non più di quattro volte?

Esercizio 5. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri $a = 9100$ e $b = 6000$, e si lo si esprima nella forma $d = \alpha a + \beta b$, con α e β interi.

Esercizio 6. Nell'insieme $V = \{5h + 1 : h \in \mathbb{Z}\}$ si consideri la relazione \sqsubseteq definita ponendo

$$5h + 1 \sqsubseteq 5k + 1 \iff h = k \text{ oppure } |h| < |k|,$$

dove $<$ indica la relazione d'ordine usuale in \mathbb{N} .

- Si verifichi che \sqsubseteq è una relazione d'ordine in V .
- Si stabilisca se (V, \sqsubseteq) è totalmente ordinato, motivando la risposta.
- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di (V, \sqsubseteq) .
- Si stabilisca se (V, \sqsubseteq) è un reticolo, e perchè.
- Sia $W = \{-19, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21\}$. Si disegni il diagramma di Hasse di (W, \sqsubseteq) .

Esercizio 7. Si consideri l'operazione \perp definita ponendo

$$a \perp b = a + b - \frac{1}{2},$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$.

- Si dimostri che la struttura algebrica (\mathbb{Q}, \perp) è un gruppo abeliano, **evidenziando** in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Q}$.
- Si dimostri che l'applicazione

$$\sigma : a \in \mathbb{N} \mapsto a + \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

è un omomorfismo di monoidi tra $(\mathbb{N}, +)$ e (\mathbb{Q}, \perp) .

Esercizio 8. Si consideri il gruppo $(U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot)$ degli elementi invertibili del monoide (\mathbb{Z}_{14}, \cdot) .

- Si scriva la tabella moltiplicativa di $(U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot)$.
- Si stabilisca se $U(\mathbb{Z}_{14})$ è una parte stabile di $(\mathbb{Z}_{14}, +)$.

Esercizio 9. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 0$ risulta

$$6^0 + 6^1 + 6^2 + \dots + 6^n = \frac{6^{n+1} - 1}{5}.$$

Esercizio 10. Si considerino le applicazioni

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{4}{5}x - 1 \in \mathbb{Q}, \quad g : y \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{5}{4}(y + 1) \in \mathbb{Q}.$$

- Si provi che f è iniettiva.
- Si provi che g è suriettiva.
- Si calcoli:

$$f(5\mathbb{N}) =$$

$$f^{-1}(\{1, 2, 5\}) =$$

- Si provi che f e g sono l'una l'inversa dell'altra.