

MATEMATICA DISCRETA

DOTT. C. DELIZIA

PRIMO APPELLO

9 FEBBRAIO 2006

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____

Esercizio 1. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{Z}_5).$$

Esercizio 2. Si determinino tutti gli interi a che siano soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} a \equiv 4 \pmod{7} \\ 2a \equiv 10 \pmod{6} \\ 3a \equiv 9 \pmod{12} \\ |a| \leq 100 \end{cases}$$

Esercizio 3. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_7 , esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 4y + 2z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$

Esercizio 5. Si consideri l'operazione \perp definita ponendo

$$a \perp b = a + b + 5,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.

• Si dimostri che la struttura algebrica (\mathbb{Z}, \perp) è un gruppo abeliano, **evidenziando** in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Z}$.

• Si dimostri che i gruppi $(\mathbb{Z}, +)$ (dove $+$ denota la usuale somma tra numeri interi) e (\mathbb{Z}, \perp) sono isomorfi.

Esercizio 6. Si consideri il monoide $(M_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ delle matrici quadrate di ordine 2 su \mathbb{Z}_2 con il prodotto righe per colonne.

- Quanti sono gli elementi di $M_2(\mathbb{Z}_2)$?
- Quanti e quali sono gli elementi simmetrizzabili del monoide $(M_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$?

- Si dimostri che la relazione \mathcal{R} definita ponendo

$$A \mathcal{R} B \iff |A| = |B|,$$

dove $|A|$ denota il determinante della matrice A , è una relazione di equivalenza in $M_2(\mathbb{Z}_2)$.

- Quante e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $M_2(\mathbb{Z}_2)/\mathcal{R}$?

- Si dimostri che la relazione \mathcal{R} è compatibile con il prodotto righe per colonne.

Esercizio 7. Nell'insieme \mathbb{N}^* dei numeri naturali positivi si consideri la relazione \sqsubseteq definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 4a < 3b,$$

dove $<$ indica la relazione d'ordine usuale in \mathbb{N} .

- Si verifichi che \sqsubseteq è una relazione d'ordine in \mathbb{N}^* .

- Si stabilisca se $(\mathbb{N}^*, \sqsubseteq)$ è ben ordinato, motivando la risposta.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di $(\mathbb{N}^*, \sqsubseteq)$.

- Si stabilisca se $(\mathbb{N}^*, \sqsubseteq)$ è un reticolo, e perchè.

- Sia $S = \{a \in \mathbb{N}^* : a \leq 12\}$. Si disegni il diagramma di Hasse di (S, \sqsubseteq) .

Esercizio 8. Si consideri il l'anello $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ degli interi modulo n . Si dimostri che un elemento $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ è invertibile se e solo se esso non è divisore dello zero.

Esercizio 9. Si consideri il l'anello $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$ degli interi modulo 21.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$ è un campo.
- Si determini l'insieme D dei divisori dello zero di $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$.
- Motivando la risposta, si stabilisca se D è una parte stabile di (\mathbb{Z}_{21}, \cdot) .

Esercizio 10. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 0$ risulta

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Esercizio 11. Si considerino le applicazioni

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{2}{3}x + 1 \in \mathbb{Q}, \quad g : y \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{4}{5}(y + 1) \in \mathbb{Q}.$$

- Si provi che f è iniettiva.
- Si provi che g è suriettiva.
- Si calcoli:
 $f(3\mathbb{N}) =$
 $f^{-1}(\{1, 2, 5\}) =$
- Si stabilisca se f è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.
- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.