

MATEMATICA DISCRETA

GRUPPO 1

DOTT. C. DELIZIA

PRIMA PROVA IN ITINERE

22 NOVEMBRE 2004

ESERCIZIO 1. Siano A l'insieme dei divisori di -28 , B l'insieme dei divisori di 42 .

- Elencandone gli elementi, si descrivano gli insiemi A , B e $A \Delta B$.
- Quante sono le possibili applicazioni iniettive di A in B ?
- Quante sono le possibili applicazioni non iniettive di A in B ?
- Quante sono le possibili applicazioni iniettive di B in A ?
- Quanti sono i sottoinsiemi di A aventi ordine 6 ?
- Quante diverse dozzine ordinate si possono ottenere disponendo in tutti i modi possibili i valori assoluti degli elementi di A ?

ESERCIZIO 2. Sia $f : A \rightarrow B$ un'applicazione. Si dimostri che:

- $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$, per ogni $A_1, A_2 \subseteq A$;
- in generale, non è vero che $f(A_1) \setminus f(A_2) = f(A_1 \setminus A_2)$, per ogni $A_1, A_2 \subseteq A$;
- se f è iniettiva, allora $f(A_1) \setminus f(A_2) = f(A_1 \setminus A_2)$, per ogni $A_1, A_2 \subseteq A$.

ESERCIZIO 3. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze tra \mathbb{N} e \mathbb{Q} , si stabilisca se essa è un'applicazione, motivando la risposta.

- $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} : 5x^2 = 4y\}$
- $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} : 5x = 4|y|\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} : 5x = 4y\}$
- $\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} : 5x = 4y^2\}$

ESERCIZIO 4. Si consideri l'applicazione $f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{7x-3}{2} \in \mathbb{Q}$.
Si verifichi che f è invertibile, e se ne determini l'inversa.

ESERCIZIO 5. Si considerino le applicazioni

$$g : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 6 \in \mathbb{Z}, \quad h : z \in \mathbb{Z} \mapsto |z - 6| \in \mathbb{N}.$$

- Si calcoli:

$$g(\{0, 2, 4\}) =$$

$$g(\mathbb{N}) =$$

$$h(\{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}) =$$

$$h(\mathbb{Z}) =$$

$$g^{-1}(\mathbb{Z}) =$$

$$g^{-1}(\{-6, -4, 2, 4\}) =$$

$$h^{-1}(\{1, 2, 3\}) =$$

$$h^{-1}(\{2, 6\}) =$$

- Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.
- Si stabilisca se h è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se h è suriettiva, e perchè.
- Si determini l'applicazione composta $h \circ g$.
- Si stabilisca se $h \circ g$ è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se $h \circ g$ è suriettiva, e perchè.
- Si determini l'applicazione composta $g \circ h$.
- Si stabilisca se $g \circ h$ è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se $g \circ h$ è suriettiva, e perchè.

ESERCIZIO 6. Si determinino quoziente e resto della divisione euclidea di -12 per 9 .

ESERCIZIO 7. Si scriva l'espressione del numero $(1000)_6$ in base 7 .

ESERCIZIO 8. Si considerino i numeri interi $a = 704, b = 462$.

- Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si calcoli il massimo comun divisore positivo $d = (a, b)$.
- Si determinino i coefficienti interi α e β che verificano l'uguaglianza $d = \alpha a + \beta b$.
- Si calcoli il minimo comune multiplo positivo di a e b .

ESERCIZIO 9. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$2 + 10 + 18 + \dots + (8n - 6) = 4n^2 - 2n.$$

ESERCIZIO 10. Si consideri la relazione \mathcal{R} in \mathbb{Z} definita ponendo

$$x \mathcal{R} y \iff |x - 3| = |y + 3|.$$

- Si stabilisca se \mathcal{R} è riflessiva, motivando la risposta.
- Si stabilisca se \mathcal{R} è simmetrica, motivando la risposta.
- Si stabilisca se \mathcal{R} è transitiva, motivando la risposta.

ESERCIZIO 11. Si consideri la relazione \sim in \mathbb{Z} definita ponendo

$$x \sim y \iff 3x + 5y \text{ è pari.}$$

- Si dimostri che \sim è una relazione di equivalenza.
- Si calcoli:
 - $[0]_{\sim} =$
 - $[1]_{\sim} =$
 - $[2]_{\sim} =$
- Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente \mathbb{Z}/\sim ?