Matematica Discreta

Gruppo 1

Dott. C. Delizia

Prima Prova in Itinere

28 Novembre 2005

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

<u>Esercizio 1.</u> Siano A, B e C insiemi. Si dimostri che $A \cap B \subseteq C \implies (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = \emptyset$.

<u>Esercizio 2.</u> Sia $f : A \longrightarrow B$ un'applicazione. Si dimostri che:

- $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$, per ogni $B_1, B_2 \subseteq B$;

- in generale, non è vero che $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2) \implies B_1 \subseteq B_2$, per ogni $B_1, B_2 \subseteq B$;

- se f è suriettiva, allora $B_1 \subseteq B_2 \iff f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$, per ogni $B_1, B_2 \subseteq B$.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Per ciascuna delle seguenti corrispondenze tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, si stabilisca se essa è un'applicazione, motivando la risposta.

- $\mathcal{R}_1 = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \,:\, x = \frac{1}{y}\}$;

- $\mathcal{R}_2 = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \,:\, 3x = 2|y|\}$;

- $\mathcal{R}_3 = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \,:\, 3|x| = 2y\}$.

<u>ESERCIZIO 4.</u> Si consideri l'applicazione $f : x \in \mathbb{Q} \longmapsto \frac{1-3x}{2} \in \mathbb{Q}$.
Si stabilisca se f è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

<u>ESERCIZIO 5.</u> Si considerino le applicazioni

$$f : n \in \mathbb{N}_d \longmapsto n+3 \in \mathbb{N}_p\,, \qquad g : z \in \mathbb{Z} \longmapsto 2|z|+1 \in \mathbb{N}_d.$$

- Si calcoli:

  $f(\mathbb{N}_d) =$

  $g(\mathbb{N}) =$

  $f^{-1}(\{0\,,\,2\}) =$

  $g^{-1}(\{1\,,\,3\}) =$

- Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

- Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.

- Si determini l'applicazione composta $f \circ g$.

- Si stabilisca se $f \circ g$ è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se $f \circ g$ è suriettiva, e perchè.

<u>ESERCIZIO 6.</u> Si determinino quoziente e resto della divisione euclidea di -31 per 7.

<u>ESERCIZIO 7.</u> Si considerino i numeri interi $a = 1002, b = 321$.

- Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si calcoli il massimo comun divisore positivo $d = (a, b)$.

- Si determinino i coefficienti interi α e β che verificano l'uguaglianza $d = \alpha a + \beta b$.

- Si calcoli il minimo comune multiplo positivo di a e b.

<u>ESERCIZIO 8.</u> Si scriva l'espressione del numero $(5\,4\,3\,2)_7$ in base 5.

ESERCIZIO 9. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 4$ risulta

$$7 + 9 + 11 + \cdots + (2n - 1) = n^2 - 9.$$

ESERCIZIO 10.

• Quante differenti parole, non necessariamente di senso compiuto, è possibile ottenere utilizzando tutte le lettere della parola VELA?

• Quante differenti parole, non necessariamente di senso compiuto, è possibile ottenere utilizzando tutte le lettere della parola CAMICIA?

• Quante differenti parole, non necessariamente di senso compiuto, è possibile ottenere utilizzando 3 lettere tra quelle della parola BANCO?

ESERCIZIO 11. Sia $A = \{a\,,\, b\,,\, c\,,\, d\}$. Nell'insieme A si consideri la relazione

$$\mathcal{R} = \{(a,a)\,,\,(a,b)\,,\,(b,b)\,,\,(b,c)\,,\,(c,b)\,,\,(c,c)\}.$$

• Si stabilisca se $\mathcal{R}$ è riflessiva, motivando la risposta.

• Si stabilisca se $\mathcal{R}$ è simmetrica, motivando la risposta.

• Si stabilisca se $\mathcal{R}$ è transitiva, motivando la risposta.