Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Secondo Appello — 27 gennaio 2010

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**
☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**

Esercizio 1.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = (A \to \neg B \vee A) \wedge (\neg B \to A).$$

Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è una contraddizione.

Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

- Si consideri la formula ben formata

$$R = ((\neg B) \vee A) \to (((\neg C) \wedge B) \to ((A \vee B) \wedge C)).$$

Si eliminino le parentesi ovunque possibile, in modo da ottenere una formula ben formata equivalente a R.

Esercizio 2. Si scrivano due differenti formule ben formate che abbiano la seguente tavola di verità:

A	B	C	Q
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$Q = (A(x) \to \exists y B(y)) \to \forall x C(x) \wedge B(y).$$

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 5x \equiv 4 \pmod{3} \\ 6x \equiv 8 \pmod{14} \\ 3x \equiv 7 \pmod{8} \\ |x| \leq 300. \end{cases}$$

Esercizio 5. Si consideri la corrispondenza

$$f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} : y = \frac{x-1}{x} \right\}.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione.

- Si stabilisca se f è invertibile, e in caso affermativo se ne individui l'inversa.

- Si calcoli:

  $f(\mathbb{N}_d) =$

  $f^{-1}(\mathbb{Z}) =$

Si consideri poi l'applicazione $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita ponendo

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1/x & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 6. Si consideri l'insieme $S = \{2, 3, 4, \dots\}$ dei numeri naturali maggiori di 1. Per ogni $a \in S$ si denoti con $\pi(a)$ il numero dei fattori primi (non necessariamente distinti) di a. Si consideri in S la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo:

$$a\mathcal{R}b \iff \pi(a) = \pi(b).$$

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza in S.

- Si descrivano le seguenti classi di equivalenza:

  $[2]_{\mathcal{R}} =$

  $[3]_{\mathcal{R}} =$

  $[4]_{\mathcal{R}} =$

  $[12]_{\mathcal{R}} =$

- Quanti sono gli elementi dell'insieme quoziente $S/\mathcal{R}$?

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ è compatibile in $(S, \cdot)$.

- Come è definita l'operazione quoziente in $(S/\mathcal{R}, \cdot)$?

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ non è compatibile in $(S, +)$.

Esercizio 7. Con le stesse notazioni dell'esercizio precedente, si consideri il sottoinsieme

$$T = \{8, 10, 11, 15, 16\}$$

di S. Nell'insieme T si consideri la relazione d'ordine $\sqsubseteq$ definita ponendo:

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } \pi(a) < \pi(b).$$

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(T, \sqsubseteq)$.

- Si stabilisca se $(T, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.

- Si dimostri che $(T, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

- Motivando la risposta, si stabilisca se il reticolo $(T, \sqsubseteq)$ è distributivo.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(T, \sqsubseteq)$ è isomorfo al reticolo $(A, |)$, dove $A = \{1, 2, 3, 6, 12\}$ e $|$ denota la relazione del *divide* tra numeri naturali.

Esercizio 8. Con $A = \{1, 2, 3\}$, si consideri la struttura $(\mathcal{P}(A), \dot\cup)$, dove $\mathcal{P}(A)$ denota l'insieme delle parti di A e $\dot\cup$ l'usuale unione disgiunta tra insiemi.

- Si provi che la struttura algebrica $(\mathcal{P}(A), \dot\cup)$ è un semigruppo commutativo.

- Qual è l'eventuale l'elemento neutro di $(\mathcal{P}(A), \dot\cup)$?

- Si scriva la tabella moltiplicativa di $(\mathcal{P}(A), \dot\cup)$.

- Sia $B = \{1, 2\}$. Motivando la risposta, si stabilisca se il sottoinsieme $\mathcal{P}(B)$ è un sottosemigruppo di $(\mathcal{P}(A), \dot\cup)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se l'applicazione

  $$f : X \in \mathcal{P}(A) \longmapsto A \setminus X \in \mathcal{P}(A)$$

  è un omomorfismo tra i semigruppi $(\mathcal{P}(A), \dot\cup)$ e $(\mathcal{P}(A), \cap)$.

Esercizio 9. Motivando la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali di 3 cifre che hanno almeno una delle cifre uguale a 0.

Esercizio 10. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Si determinino, se esistono, una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 11. Si estraggano due basi di $\mathbb{R}^3$ dal seguente insieme di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\left(1,-\frac{1}{2},0\right),(0,1,0),(0,0,1),\left(0,\sqrt{2},0\right),\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{6},0\right),\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Esercizio 12. Nello spazio affine tridimensionale si considerino il piano π di equazione

$$\pi \ : \ x-2y+2z=0$$

e la retta r di equazioni parametriche

$$r \ : \ \begin{cases} x=-1+t \\ y=1-2t \\ z=3-t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

- Si determini il punto P di intersezione tra la retta r e il piano π.

- Si determini la proiezione ortogonale del punto $Q=(1,0,1)$ sul piano π.