

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Secondo Appello — 9 febbraio 2011

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

- Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti** (3 ore)
- Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** (2 ore)
- Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12** (30 minuti)
- Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti tranne il numero 12** (3 ore)
-

In quale di questi giorni preferireste sostenere l'esame orale? Barrare una casella.

- mercoledì 16/02 lunedì 28/02
-

Esercizio 1. Si dimostri che, con A e B insiemi arbitrari, si ha

$$B \setminus A = \emptyset \iff B \subseteq A.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : x \in \mathbb{Z} \mapsto x^2 - x \in \mathbb{N}_0$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Si calcoli:

$$f(\{-2, 2, 1\}) =$$

$$f^{-1}(\mathbb{N}_d) =$$

- Considerata l'applicazione $g : y \in \mathbb{Z} \mapsto 1 - y \in \mathbb{Z}$, si determini l'applicazione composta $f \circ g$.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_6)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Nell'insieme $A = \{2, 3, 4, \dots\}$ dei numeri naturali maggiori di 1 si consideri la relazione \mathcal{R} definita in A ponendo

$$a \mathcal{R} b \iff \text{esiste un numero primo } p \text{ tale che } p^2 \text{ divide } ab.$$

Motivando le risposte, si stabilisca se \mathcal{R} è:

- riflessiva

- simmetrica

- asimmetrica

- transitiva

Esercizio 5. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 5x \equiv 7 \pmod{11} \\ 8x \equiv 6 \pmod{10} \\ 4x \equiv 2 \pmod{6} \\ |x| \leq 200. \end{cases}$$

Esercizio 6. Si considerino l'insieme \mathbb{Z}_4 e l'operazione interna \star definita ponendo

$$a \star b = a + b + 2ab.$$

- Si scriva la tavola di moltiplicazione della struttura algebrica (\mathbb{Z}_4, \star) .

- Si dimostri che (\mathbb{Z}_4, \star) è un gruppo abeliano, **evidenziando** in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ogni elemento $a \in \mathbb{Z}_4$.

Esercizio 7. Sia A un insieme finito di ordine 6.

- Quanti sono i sottoinsiemi di A ?
- Quanti sono i sottoinsiemi di A di ordine dispari?
- Quante sono le applicazioni iniettive di A in A ?

Esercizio 8. Si consideri l'insieme $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 60\}$, ordinato mediante la relazione $|$ del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(D, |)$.
- Si dimostri che $(D, |)$ è un reticolo.
- Motivando la risposta, si stabilisca se il reticolo $(D, |)$ è distributivo.

Esercizio 9. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_7 , esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Esercizio 10. Sul campo \mathbb{Q} dei numeri razionali, si considerino gli spazi vettoriali \mathbb{Q}^3 e \mathbb{Q}^4 , e l'applicazione

$$f : (x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4 \longmapsto (x + y, x + y + z, 0) \in \mathbb{Q}^3.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.
- Si determini l'immagine W di f .
- Si determinino la dimensione di W e una sua base.

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale si considerino il piano π di equazione

$$\pi : x - y + z = 0$$

e la retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

- Si determini il punto P di intersezione tra la retta r e il piano π .

- Data la retta r' passante per i punti

$$A = (0, 1, 1), \quad B = (1, 2, 0),$$

si stabilisca se r è ortogonale a r' .

Esercizio 12. Si consideri la formula ben formata

$$P = (A \rightarrow C \vee \neg B) \vee (B \rightarrow \neg A).$$

- Si scriva la tavola di verità di P .

- Si scriva una formula in forma normale congiuntiva equivalente a P .

- Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi \neg e \wedge .