Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Primo Appello — 25 gennaio 2012

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Con $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 8\}$, si determinino i seguenti insiemi:

- $A \cup B =$
- $A \cap B =$
- $A \setminus B =$
- $A \dot{\cup} B =$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : x \in \mathbb{Z} \longmapsto |x| - x \in \mathbb{N}_0$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.
- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.
- Considerata l'applicazione $g : y \in \mathbb{Z} \longmapsto y + 1 \in \mathbb{Z}$, si determini l'applicazione composta $f \circ g$.
- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ g$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_8)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali positivi, si definisca una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ in modo che l'insieme quoziente $\mathbb{N}/_{\mathcal{R}}$ abbia ordine 3 e solo una classe di equivalenza sia finita.

Esercizio 5. Si determini il più piccolo intero positivo che sia soluzione del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 14x \equiv 7 \pmod{21} \\ 8x \equiv 6 \pmod{14} \\ 4x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

Esercizio 6. Si considerino l'insieme $\mathbb{Z}$ e l'operazione interna $\star$ definita ponendo

$$a \star b \;=\; a + b + 2ab.$$

- Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \star)$ è un monoide commutativo.

- Si determini il gruppo degli elementi simmetrizzabili del monoide $(\mathbb{Z}, \star)$.

Esercizio 7. Descrivendo il procedimento utilizzato per ottenere la risposta, si precisi quanti sono i numeri interi positivi minori di 96 che siano divisibili per almeno uno tra 2, 5 e 7.

Esercizio 8. Sia $(A \subseteq)$ un insieme ordinato.

- Si dimostri che il minimo di A, se esiste, è unico.
- Si dimostri che se A possiede 2 elementi minimali allora non ha minimo.
- Con $B \subseteq A$, si dia la definizione di estremo inferiore di B in A.
- Si dimostri che se A è totalmente ordinato allora esso è un reticolo.

Esercizio 9. Utilizzando il metodo di Gauss-Jordan, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 11:

$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ 3x - y + 5z = 0 \\ -3x + 6y + 3z = 3. \end{cases}$$

Esercizio 10. Nello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_7)^5$ sul campo $\mathbb{Z}_7$ si consideri il sottospazio V generato dai vettori

$$v_1 = (1, 2, 0, 2, 3), \quad v_2 = (5, 2, 1, 3, 0), \quad v_3 = (4, 0, 1, 1, 4), \quad v_4 = (1, 1, 1, 1, 1).$$

Si determinino la dimensione di V e una sua base.

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale si considerino il piano π di equazione

$$\pi \ : \ 2x + y - 3z + 1 = 0$$

e la retta r di equazioni parametriche

$$r \ : \ \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

- Si verifichi se la retta r e il piano π si intersecano.

- Data la retta r' passante per i punti

$$A = (-1, 1, 0), \qquad B = (2, 1, -2),$$

  si stabilisca se r è ortogonale a r'.

Esercizio 12. Si consideri la formula ben formata

$$Q = (A \wedge B \to C \vee \neg B) \wedge \neg C.$$

- Si scriva la tavola di verità di Q.

- Si scriva una formula in forma normale disgiuntiva equivalente a Q.

- Si scriva una formula equivalente a Q usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.