Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Primo Appello — 22 gennaio 2013

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Ragionando per induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 3$ risulta

$$2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^n \;=\; 2^{n+1} - 8.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Q}$ definita ponendo

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(x) = \dfrac{2}{x+1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

- Si dimostri che f è biettiva.

- Si determini l'inversa f^{-1} di f.

- Si determini l'immagine $f(\mathbb{N}_d)$.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{Z}_3).$$

Esercizio 4. Si determini il più piccolo intero positivo soluzione dell'equazione congruenziale

$$100\,x \equiv 273 \pmod{833}.$$

Esercizio 5. Siano A un insieme non vuoto e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in A. Con $a, b, c \in A$ si dimostri che:

- $[a]_{\mathcal{R}} \cup [b]_{\mathcal{R}} \subseteq [c]_{\mathcal{R}} \Longrightarrow a \,\mathcal{R}\, b$

- $a \in [b]_{\mathcal{R}} \setminus [c]_{\mathcal{R}} \Longrightarrow b \not\mathcal{R}\, c$

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato, si stabilisca quanti sono i numeri interi positivi ≤ 100 e divisibili per 3 o per 4, ma non per 9.

Esercizio 7. Si consideri l'operazione $\perp$ definita ponendo

$$a \perp b = a + b + \frac{3}{4},$$

per ogni a, $b \in \mathbb{Q}$.

- Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, \perp)$ è un gruppo abeliano, **evidenziando** in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Q}$.

- Si dimostri che l'applicazione
$$f \;:\; a \in \mathbb{N}_0 \;\mapsto\; a - \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$$
è un omomorfismo di monoidi tra $(\mathbb{N}_0, +)$ e $(\mathbb{Q}, \perp)$.

Esercizio 8. Sia $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$, e si consideri il reticolo $(A, |\,)$, dove $|$ denota la relazione del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(A, |\,)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |\,)$ è ben ordinato.

- Si individui un sottoreticolo di $(A, |\,)$ di ordine 5, e se ne disegni il diagramma di Hasse.

- Motivando la risposta, si stabilisca se il reticolo $(A, |\,)$ è distributivo.

Esercizio 9. Si determini la matrice $A \in M_2(\mathbb{Z}_7)$ avente autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, e relativi autovettori $v_1 = (6, 1)$ e $v_2 = (3, 6)$.

Esercizio 10. Sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{Q}^5$. Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{Q}^5$ si stabilisca se si tratta di un sottospazio, ed in caso affermativo se ne determini la dimensione e una base.

- $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Q}^5 : x_1 = 1, x_2 + x_4 = x_5\}$

- $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Q}^5 : x_2 = 0, x_3 - x_4 = x_5\}$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano assegnati i punti

$$A = (0, 1, 1), \qquad B = (-1, 0, 0), \qquad C = (1, 1, 1), \qquad D = (1, 2, 0).$$

- Si determinino le equazioni parametriche della retta r passante per i punti A e B e della retta s passante per i punti C e D.

- Si stabilisca se r e s sono sghembe, parallele o incidenti; in quest'ultimo caso si determinino le coordinate del punto d'intersezione.

Esercizio 12.

- Si scriva la tavola di verità della formula ben formata

$$P = (A \to \neg B \wedge C) \vee \neg A.$$

- Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

- Si determini una formula in forma normale disgiuntiva equivalente a P.

- Indicando con una crocetta la risposta scelta, si determini il valore di verità di ciascuna delle seguenti proposizioni:

  P_1 : se $(\mathbb{N}_0, +)$ è un gruppo abeliano allora nello spazio tridimensionale un piano e una retta hanno sempre almeno un punto in comune;

  ☐ VERO ☐ FALSO

  P_2 : se 2 divide -4 allora esistono monoidi con 2 elementi neutri;

  ☐ VERO ☐ FALSO

  P_3 : se -5 è un numero primo allora $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;

  ☐ VERO ☐ FALSO

  P_4 : se non esistono matrici 2×2 su $\mathbb{R}$ con determinante -1 allora 987654321 è un numero primo.

  ☐ VERO ☐ FALSO