Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Primo Appello — 20 gennaio 2014

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**

☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si stabilisca per quali valori naturali di n risulta

$$n^2 > 2n + 1.$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni

$$f : x \in \mathbb{N}_0 \longmapsto x - x^2 \in \mathbb{Z} \qquad\qquad g : y \in \mathbb{Z} \longmapsto y + y^2 \in \mathbb{N}_0.$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se g è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

- Si determini la controimmagine $(g \circ f)^{-1}(\{0\})$.

Esercizio 3. Si verifichi se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_4)$$

è invertibile e, in caso affermativo, se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Si determini la minima soluzione positiva dell'equazione congruenziale

$$648\,x \equiv 34 \pmod{850}.$$

Esercizio 5. Si definisca una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri interi positivi che verifichi le seguenti condizioni:

$$|\mathbb{N}/_{\mathcal{R}}| = 5, \qquad 1\mathcal{R}2, \qquad [3]_{\mathcal{R}} \neq [2]_{\mathcal{R}}.$$

Esercizio 6. Quanti sono i numeri naturali che hanno una rappresentazione binaria di undici cifre di cui esattamente sei sono 0 ?

Esercizio 7. Motivando tutte le risposte, si stabilisca se la relazione $\sqsubseteq$ definita nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a \leq b + 1$$

(qui $\leq$ denota l'ordine "usuale" in $\mathbb{N}$) risulta

- riflessiva

- asimmetrica

- transitiva

Esercizio 8. Si consideri il gruppo $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$ degli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$

- Si compili la tavola di moltiplicazione del gruppo $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$.

- Si dimostri che l'insieme $\{1, 3\}$ non è un sottogruppo di $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$.

- Si determini un sottogruppo di ordine 2 di $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

- Si determinino tutti gli autovalori della matrice A.

- Per ciascun autovalore, si determini il relativo autospazio, la sua dimensione e una sua base.

- Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Riducendo a scala la matrice completa e applicando il metodo di Gauss-Jordan, si risolva il seguente sistema lineare su $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} 2y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ -x + 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (2, 1, 1), \qquad B = (1, -2, 0), \qquad C = (-1, 0, 1).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non sono allineati e si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B e C.

- Si consideri la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

  con $t \in \mathbb{R}$ e si verifichi se la retta r e il piano π sono paralleli.

Esercizio 12.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = B \ \rightarrow \ (A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B).$$

  Si scriva la tavola di verità di P.

  Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\vee$.

- Si scriva una formula in forma normale congiuntiva equivalente a P.