Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Docente: C. Delizia

Primo appello — 2 febbraio 2016

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 0$ un insieme di ordine n possiede esattamente 2^n sottoinsiemi.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione

$$f : x \in \mathbb{Z} \longmapsto x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}.$$

- Motivando la risposta, si stabilista se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilista se f è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $f \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ f$ è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema:

$$\begin{cases} 32x \equiv 18 \pmod{202} \\ 21x \equiv 33 \pmod{81} \\ |x| \leq 1000 \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dei numeri interi non nulli si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$a \, \mathcal{R} \, b \iff ab > 0.$$

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in A.

- Si descriva la partizione di A indotta da $\mathcal{R}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali che hanno rappresentazione in base 3 costituita da otto cifre di cui esattamente quattro sono 0.

Esercizio 7. Nell'insieme $A = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \iff a < c \text{ oppure } (a = c \text{ e } b \leq d).$$

- Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in A.

- Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di $(A, \sqsubseteq)$.

Esercizio 8. Si consideri la struttura algebrica costituita dall'insieme

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

con l'usuale prodotto righe per colonne. Si dimostri che A è un gruppo abeliano, **evidenziando** in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento.

Esercizio 9. Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si risolva il seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_5$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \qquad y + 3z = 2 \\ 4x + 4y + z = 3 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (1, 2, 1), \quad B = (1, -1, 0), \quad C = (-2, 0, 1), \quad D = (2, 1, 3).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche della retta r per i punti A e B.

- Si scriva l'equazione cartesiana della retta r' per i punti C e D.

- Si stabilisca se le rette r e r' sono parallele, incidenti o sghembe.

Esercizio 12. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^5$, e l'applicazione

$$f : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \longmapsto (x_1 + x_2, x_2, x_3 + x_4) \in \mathbb{R}^3.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo di f e la sua dimensione.

- Si dimostri che f è suriettiva.