Matematica Discreta

Gruppo 1 – Dott. C. Delizia

Seconda prova in itinere

29 Gennaio 2003

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, esprimendo le soluzioni con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 4 \\ 6x + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si considerino le matrici

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ n & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11}), \qquad B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & n \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{13}),$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$. Si determinino tutti i valori positivi di $n < 500$ in corrispondenza dei quali A_n e B_n risultano simultaneamente non invertibili.

Esercizio 3. Nell'insieme $5\mathbb{Z} = \{5a : \ a \in \mathbb{Z}\}$ si consideri l'operazione binaria $\perp$ definita ponendo

$$5a \perp 5b = 5ab,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.

• Si dimostri che la struttura $(5\mathbb{Z}, \perp)$ è un monoide commutativo.

• Si provi che l'applicazione $f : \ 5a \in 5\mathbb{Z} \ \mapsto \ a \in \mathbb{Z}$ è un isomorfismo di monoidi tra $(5\mathbb{Z}, \perp)$ e $(\mathbb{Z}, \cdot)$, dove $\cdot$ denota il prodotto usuale in $\mathbb{Z}$.

• Si determini il gruppo degli elementi invertibili del monoide $(5\mathbb{Z}, \perp)$.

• Si dimostri che il sottoinsieme $10\mathbb{Z} = \{10a : \ a \in \mathbb{Z}\}$ è una parte stabile di $(5\mathbb{Z}, \perp)$.

• Si verifichi che la relazione R definita in $5\mathbb{Z}$ ponendo

$$5a\ R\ 5b \Leftrightarrow a \equiv b\,(\mathrm{mod}\ 3)$$

è di equivalenza.

• Si determinino le seguenti classi di equivalenza:

$[0]_R =$

$[5]_R =$

$[10]_R =$

$[15]_R =$

$[-5]_R =$

• Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $5\mathbb{Z}_{/R}$?

• Si verifichi che la relazione R è compatibile con l'operazione $\perp$ in $5\mathbb{Z}$, e che quindi la posizione $[5a]_R \perp [5b]_R = [5ab]_R$ definisce un'operazione binaria nell'insieme quoziente $5\mathbb{Z}_{/R}$.

• Si determini la tavola di moltiplicazione di $(5\mathbb{Z}_{/R}, \perp)$, specificando poi di che tipo di struttura algebrica si tratta.

<u>**Esercizio 4.**</u> Nell'insieme $5\mathbb{N} = \{5a : \ a \in \mathbb{N}\}$ si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$5a \sqsubseteq 5b \Leftrightarrow a|b,$$

dove $|$ è la relazione del *divide* tra interi non negativi.

• Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in $5\mathbb{N}$.

• Si stabilisca se l'insieme ordinato $(5\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, se è ben ordinato, quali sono gli eventuali minimo e massimo.

• Si dimostri che $(5\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

• Qual è l'elemento $15 \vee 25$ in $(5\mathbb{N}, \sqsubseteq)$?

• Si dimostri che l'applicazione $\omega : \ 5a \in 5\mathbb{N} \mapsto a \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di reticoli tra $(5\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}, |)$.

• Si verifichi se l'applicazione $\sigma : 5a \in 5\mathbb{N} \mapsto a \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di insiemi ordinati tra $(5\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}, \leq)$, dove $\leq$ denota l'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

• Si verifichi se l'applicazione $\sigma : 5a \in 5\mathbb{N} \mapsto a \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di reticoli tra $(5\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}, \leq)$, dove $\leq$ denota l'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

• Si consideri il sottoinsieme $H = \{10\,, 15\,, 20\,, 25\,, 50\,, 150\}$ di $5\mathbb{N}$, con l'ordine indotto da $\sqsubseteq$. Si disegni il diagramma di Hasse di $(H, \sqsubseteq)$.

• Si precisi se $(H, \sqsubseteq)$ è un sottoreticolo di $(5\mathbb{N}, \sqsubseteq)$, e perchè.

• Qual è l'estremo superiore in H dell'insieme $\{15\,, 25\}$?

• Si determinino gli elementi minimali e l'eventuale minimo di $(H, \sqsubseteq)$.

• Si determinino gli elementi massimali e l'eventuale massimo di $(H, \sqsubseteq)$.