Matematica Discreta

Gruppo 1 – Gruppo 4

Dott. C. Delizia

Seconda Prova in Itinere

4 Febbraio 2004

Esercizio 1. Si determini il massimo intero negativo a tale che simultaneamente risulti $12a \equiv 36 \pmod{60}$ e $13a \equiv 26 \pmod{39}$.

Esercizio 2. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$, esprimendo le soluzioni con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -4y + 2z = 3 \\ 4x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia S l'insieme costituito dai numeri naturali della forma $2^a 3^b$, con $a, b \in \mathbb{N}$:

$$S = \{2^a 3^b : a, b \in \mathbb{N}\}.$$

Si definisca in S un'operazione binaria $\star$ ponendo

$$2^a 3^b \star 2^c 3^d = 2^{a+c} 3^{bd}.$$

- Si dimostri che $(S, \star)$ è un monoide commutativo, specificandone l'elemento neutro.
- Quali sono gli elementi simmetrizzabili del monoide $(S, \star)$?
- Si provi che l'applicazione $f : 2^a 3^b \in S \mapsto a \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di monoidi tra $(S, \star)$ e $(\mathbb{N}, +)$, dove $+$ denota la usuale somma in $\mathbb{N}$.
- Perchè f non è un isomorfismo di monoidi?
- Si provi che l'applicazione $g : 2^a 3^b \in S \mapsto b^2 \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di monoidi tra $(S, \star)$ e $(\mathbb{N}, \cdot)$, dove $\cdot$ denota il prodotto usuale in $\mathbb{N}$.
- Si dimostri che l'insieme $T = \{2^a 3^b : a, b \in \mathbb{N}_p\}$ è una parte stabile di $(S, \star)$.
- Si dimostri che l'insieme $V = \{2^a 3^b : a \in \mathbb{N}_d, b \in \mathbb{N}_p\}$ non è una parte stabile di $(S, \star)$.
- Si verifichi che la relazione $\mathcal{R}$ definita in S ponendo

$$2^a 3^b \,\mathcal{R}\, 2^c 3^d \Leftrightarrow a + c \text{ pari}, b + d \text{ pari}$$

è di equivalenza.

- Si determinino le seguenti classi di equivalenza:

  $[1]_\mathcal{R} =$
  $[2]_\mathcal{R} =$
  $[3]_\mathcal{R} =$
  $[4]_\mathcal{R} =$
  $[6]_\mathcal{R} =$
  $[9]_\mathcal{R} =$
  $[12]_\mathcal{R} =$

- L'insieme quoziente $S/\mathcal{R}$ è costituito da 4 elementi. Quali sono?
- Si verifichi che la relazione $\mathcal{R}$ è compatibile con l'operazione binaria $\star$ in S, e che quindi la posizione $[2^a 3^b]_\mathcal{R} \star [2^c 3^d]_\mathcal{R} = [2^{a+c} 3^{bd}]_\mathcal{R}$ definisce un'operazione binaria nell'insieme quoziente $S/\mathcal{R}$.
- Si determini la tabella moltiplicativa della struttura $(S/\mathcal{R}, \star)$.
- Quali sono gli elementi simmetrizzabili del monoide $(S/\mathcal{R}, \star)$?

Esercizio 4. Si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita nell'insieme $\mathbb{N}$ ponendo

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow a = b \text{ oppure } 2a < b$$

dove $<$ denota l'usuale ordine stretto su $\mathbb{N}$.

• Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}$.

• Si stabilisca se $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, e perchè.

• Si stabilisca se $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ è ben ordinato, e perchè.

• Qual è l'estremo inferiore del sottoinsieme $\{4, 7\}$ in $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$?

• Quali sono i maggioranti del sottoinsieme $\{1, 2\}$ in $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$?

• Si dimostri che l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ non è un reticolo.

• Si dimostri che l'applicazione identica $i_{\mathbb{N}} : a \in \mathbb{N} \mapsto a \in \mathbb{N}$ non è un isomorfismo di insiemi ordinati tra $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}, \leq)$, dove $\leq$ denota l'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

• Si dimostri che l'applicazione $k : a \in \mathbb{N} \mapsto 2a \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di insiemi ordinati di $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ in $(\mathbb{N}, \leq)$, dove $\leq$ denota l'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

• Si consideri il sottoinsieme $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ di $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$. Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \sqsubseteq)$.

• Si determinino gli elementi minimali e l'eventuale minimo di $(A, \sqsubseteq)$.

• Si determinino gli elementi massimali e l'eventuale massimo di $(A, \sqsubseteq)$.