Matematica Discreta

Gruppo 1 – Dott. C. Delizia

Anno Accademico 2002/2003

Secondo Appello – 19 febbraio 2003

Esercizio 1. Con A, B e C insiemi, si dimostri che $((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) = A \cap (B \triangle C)$.

Esercizio 2. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 9 nella forma $(3\,5\,\star\,1\,\star)_9$?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 9 nella forma $(3\,5\,\star\,1\,\star)_9$, con cifre tutte distinte?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 9 nella forma $(3\,5\,\star\,1\,\star)_9$, con cifre tutte dispari?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 9 nella forma $(3\,5\,\star\,1\,\star)_9$, con cifre tutte dispari e distinte?

• Quanti sono i numeri naturali che si possono rappresentare in base 9 utilizzando esattamente le cifre del numero $(3\,5\,2\,1\,4)_9$?

• Quanti sono i numeri naturali che si possono rappresentare in base 9 utilizzando esattamente le cifre del numero $(3\,5\,5\,3\,5)_9$?

• Si rappresenti in base 9 il numero 1001.

Esercizio 4. Si considerino le applicazioni

$$f \;:\; n \in \mathbb{N} \;\mapsto\; n + 3 \in \mathbb{Z}, \qquad g \;:\; m \in \mathbb{Z} \;\mapsto\; (m-3)^2 \in \mathbb{N}.$$

• Si dica se f è iniettiva, e perché.

• Si dica se f è suriettiva, e perché.

• Si dica se g è iniettiva, e perché.

• Si dica se g è suriettiva, e perché.

• Si determinino le applicazioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$, e si stabilisca se esse sono iniettive, suriettive o biettive, motivando le risposte

• Si calcoli:

$f^{-1}(\{5\,,\,6\}) =$

$g(\{2\,,\,3\}) =$

$g^{-1}(\{0\,,\,1\}) =$

$(g \circ f)(\{1\,,\,2\,,\,3\}) =$

$(g \circ f)^{-1}(\{3\,,\,4\,,\,5\}) =$

$(f \circ g)(3) =$

$(f \circ g)^{-1}(\{12\}) =$

$(f \circ g)^{-1}(\{7\}) =$

Esercizio 5. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri $a = 2568$ e $b = 1034$, e si lo si esprima nella forma $d = \alpha a + \beta b$, con α e β interi.

Esercizio 6. Si determini il massimo intero negativo a tale che simultaneamente risulti $a \equiv 100 \pmod{101}$ e $a \equiv 10 \pmod{11}$.

Esercizio 7. Si stabilisca se la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$
è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 8. Si consideri l'operazione $\perp$ definita ponendo $a \perp b = a + b - 2$, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.

• Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \perp)$ è un gruppo abeliano, evidenziando in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Z}$.

• Si dimostri che l'applicazione
$$\sigma \; : \; a \in \mathbb{N} \; \mapsto \; a + 2 \in \mathbb{Z}$$
è un omomorfismo di monoidi tra $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{Z}, \perp)$.

Esercizio 9. Si consideri l'insieme $S = \{1\,,\,2\,,\,4\,,\,5\,,\,10\,,\,20\,,\,25\,,\,50\,,\,100\}$ dei divisori positivi di 100.

• Si dimostri che $(S, \,|)$ è un reticolo, dove $|$ denota la usuale relazione del *divide* tra numeri naturali.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(S, \,|)$.

• Si stabilisca se $(S, \,|)$ è totalmente ordinato, e perchè.

• Nel reticolo $(S, \,|)$ si effettuino i seguenti calcoli:

$10 \vee 25 =$

$10 \wedge 25 =$

• Sia $T = S \setminus \{1\,,\,20\}$. Si dimostri che $(T, \,|)$ non è un sottoreticolo di $(S, \,|)$.

• Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di T.

Esercizio 10. Si consideri la relazione R definita in $\mathbb{N}$ ponendo
$$a \, R \, b \; \Leftrightarrow \; a \leq 2b,$$
dove $\leq$ denota la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

• Si verifichi se la relazione R è simmetrica.

• Si verifichi se la relazione R è asimmetrica.

• Si verifichi se la relazione R è transitiva.

Esercizio 11. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 4$ risulta
$$4 + 5 + \cdots + n \; = \; \frac{n^2 + n - 12}{2}.$$