

**MATEMATICA DISCRETA**  
**GRUPPO 1 – GRUPPO 4**  
**DOTT. C. DELIZIA**  
**SECONDO APPELLO – 23 FEBBRAIO 2004**

ESERCIZIO 1. Si determini il massimo intero negativo che sia soluzione del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 10 \pmod{11} \\ x \equiv 10 \pmod{13} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni  $n \geq 1$  risulta

$$\sum_{k=1}^n (k^2 - k - 1) = \frac{n^3 - 4n}{3}.$$

ESERCIZIO 3. Si determini il più piccolo intero positivo che si rappresenta in base 8 con 4 cifre di cui almeno 3 distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 7.

ESERCIZIO 4. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in  $\mathbb{Z}_{13}$ , esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 13:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 1 \\ 8x + 9y = 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. Siano  $A$  l'insieme dei divisori positivi di 12,  $B$  l'insieme dei divisori positivi di 18.

- Si descrivano gli insiemi  $A$  e  $B$ .
- Quante sono le possibili applicazioni iniettive di  $A$  in  $B$  ?
- Quante sono le possibili applicazioni non suriettive di  $A$  in  $B$  ?

ESERCIZIO 6. Si dica se la corrispondenza  $\mathcal{R} = \{(\frac{a}{b}, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : b = y\}$  è un'applicazione, motivando la risposta.

ESERCIZIO 7. Si considerino le applicazioni

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{x+2}{3} \in \mathbb{Q}, \quad g : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{x^2}{3} \in \mathbb{Q}.$$

- Si dimostri che  $f$  è invertibile.
- Si determini l'applicazione inversa  $f^{-1}$ .
- Si stabilisca se  $g$  è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se  $g$  è suriettiva, e perchè.
- Si determinino le applicazioni composte  $g \circ f$  e  $f \circ g$ .
- Si stabilisca se  $f \circ g$  è iniettiva, e perchè.
- Si calcoli:

$$f(\{0, 1, -1\}) =$$

$$f^{-1}(\{16\}) =$$

$$g(\{0, 1, -1\}) =$$

$$g^{-1}(\{16\}) =$$

$$(g \circ f)^{-1}(\{0\}) =$$

$$(f \circ g)^{-1}(\{\frac{5}{9}\}) =$$

**ESERCIZIO 8.** Si consideri l'operazione  $\star$  definita ponendo  $a \star b = a + b + 3$ , per ogni  $a, b \in \mathbb{Z}_5$ .

- Si scriva la tabella moltiplicativa di  $(\mathbb{Z}_5, \star)$ .
- Si dimostri che la struttura algebrica  $(\mathbb{Z}_5, \star)$  è un gruppo abeliano, evidenziando in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento  $a \in \mathbb{Z}_5$ .
- Si dimostri che l'applicazione

$$\sigma : a \in \mathbb{N} \mapsto a + 2 \in \mathbb{Z}_5$$

è un omomorfismo di monoidi tra  $(\mathbb{N}, +)$  e  $(\mathbb{Z}_5, \star)$ .

**ESERCIZIO 9.** Si consideri la relazione  $\sim$  in  $\mathbb{N}$  definita ponendo

$$x \sim y \iff x^2 - y^2 \text{ è multiplo di } 3.$$

- Si dimostri che  $\sim$  è una relazione di equivalenza.
- Si calcoli:
  - $[0]_{\sim} =$
  - $[1]_{\sim} =$
  - $[2]_{\sim} =$
  - $[3]_{\sim} =$
  - $[4]_{\sim} =$
- Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente  $\mathbb{N}/\sim$  ?
- Si dimostri che l'assegnazione  $\omega : [a]_{\sim} \in \mathbb{N}/\sim \mapsto [2a]_{\sim} \in \mathbb{N}/\sim$  definisce un'applicazione.
- Si dimostri che  $\omega$  è iniettiva.

**ESERCIZIO 10.** Si consideri l'insieme  $S = \{3n + 2 : n \in \mathbb{N}\}$ , e la relazione  $\sqsubseteq$  definita in  $S$  ponendo

$$3n + 2 \sqsubseteq 3m + 2 \iff n|m,$$

dove  $|$  è la relazione del *divide* in  $\mathbb{N}$ .

- Si dimostri che  $\sqsubseteq$  è una relazione d'ordine in  $S$ .
- Si precisi se  $(S, \sqsubseteq)$  è totalmente ordinato, e se è ben ordinato.
- Si dimostri che  $(S, \sqsubseteq)$  è un reticolo.
- Si dimostri che l'applicazione  $f : 3n + 2 \in S \mapsto n \in \mathbb{N}$  è un isomorfismo di reticoli tra  $(S, \sqsubseteq)$  ed  $(\mathbb{N}, |)$ .
- Si specifichi se esistono, e quali sono, il minimo ed il massimo di  $(S, \sqsubseteq)$ .
- Si disegni il diagramma di Hasse del sottoinsieme  $T = \{5, 8, 11, 14, 17, 20, 38\}$  di  $S$ .
- Sia  $U = \{8, 17\}$ . Si calcoli:

$$\sup_T(U) =$$

$$\inf_T(U) =$$