

MATEMATICA DISCRETA

GRUPPO 1 – MATRICOLE 0 - 1

DOTT. C. DELIZIA

SECONDO APPELLO

23 FEBBRAIO 2005

Esercizio 1. Si determinino tutti gli interi x che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali, e tali che $|x| < 300$:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ 2x \equiv 10 \pmod{18} \end{cases}$$

Esercizio 2. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_7 , esprimendo le soluzioni con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 2x + z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si considerino le applicazioni

$$f : n \in \mathbb{N} \mapsto 1 - n \in \mathbb{Z}, \quad g : z \in \mathbb{Z} \mapsto |z| + 2 \in \mathbb{N}.$$

- Si calcoli:

$$f(\mathbb{N}_p) =$$

$$f(\mathbb{N}_d) =$$

$$f^{-1}(\mathbb{N}) =$$

$$g(\mathbb{N}) =$$

$$g^{-1}(\mathbb{N}_p) =$$

$$g^{-1}(\mathbb{N}_d) =$$

- Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.
- Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.
- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.
- Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.
- Si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva, e perchè.

Esercizio 4. Sia $S = \{a, b, c\}$. Si definisca nell'insieme $P(S)$ delle parti di S un'operazione binaria \star ponendo

$$A \star B = (A \cup B) \setminus \{c\}, \quad \forall A, B \in P(S).$$

- Si dimostri che $(P(S), \star)$ è un semigrupp commutativo.
- Si dimostri che $(P(S), \star)$ non è un monoide.
- Si scriva la tabella moltiplicativa di $(P(S), \star)$.
- Si stabilisca se l'insieme $T = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ è una parte stabile di $(P(S), \star)$.
- Si provi che l'applicazione $f : A \in P(S) \mapsto A \cap \{a, b\} \in P(S)$ è un omomorfismo di semigrupp tra $(P(S), \cup)$ e $(P(S), \star)$, dove \cup denota la usuale operazione di unione insiemistica in $P(S)$.
- Si verifichi che la relazione \sim definita in $P(S)$ ponendo

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cup \{c\} = B \cup \{c\}$$

è di equivalenza.

- Si determinino le seguenti classi di equivalenza:

$$[\emptyset]_{\sim} =$$

$$[\{a\}]_{\sim} =$$

$$[\{b\}]_{\sim} =$$

$$[\{c\}]_{\sim} =$$

$$[S]_{\sim} =$$

- L'insieme quoziente $P(S)/_{\sim}$ è costituito da 4 elementi. Quali sono?
- Si verifichi che la relazione \sim è compatibile con l'operazione binaria \star in $P(S)$, e che quindi la posizione

$$[A]_{\sim} \star [B]_{\sim} = [(A \cup B) \setminus \{c\}]_{\sim}$$

definisce un'operazione binaria nell'insieme quoziente $P(S)/_{\sim}$.

- Si determini la tabella moltiplicativa della struttura $(P(S)/_{\sim}, \star)$.
- Si dimostri che la struttura $(P(S)/_{\sim}, \star)$ è un monoide commutativo.

Esercizio 5. Si consideri la relazione \sqsubseteq definita nell'insieme \mathbb{N} ponendo

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow a = b \text{ oppure } 3a < 2b,$$

dove $<$ denota l'usuale ordine stretto su \mathbb{N} .

- Si verifichi che \sqsubseteq è una relazione d'ordine in \mathbb{N} .
- Si stabilisca se $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, e perchè.
- Qual è l'estremo inferiore del sottoinsieme $\{5, 6\}$ in $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$?
- Quali sono i maggioranti del sottoinsieme $\{5, 6\}$ in $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$?
- Si dimostri che l'insieme ordinato $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ non è un reticolo.
- Si disegni il diagramma di Hasse del sottoinsieme $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ di $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$.

Esercizio 6. Si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 2$ risulta

$$12 + 18 + 24 + \cdots + 6n = 3n^2 + 3n - 6.$$

Esercizio 7. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 7 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{Z}_{11}).$$