Matematica Discreta

Dott. C. Delizia

Secondo Appello

27 Febbraio 2006

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri $a = 1204$ e $b = 567$, e si lo si esprima nella forma $d = \alpha a + \beta b$, con α e β interi.

Esercizio 2.

- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 6 nella forma $(1\,5\,\star\,2\,\star)_6$?

- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 6 nella forma $(1\,5\,\star\,2\,\star)_6$, con cifre tutte distinte?

- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 6 nella forma $(3\,5\,\star\,1\,\star)_6$, con cifre tutte dispari?

- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 6 nella forma $(3\,5\,\star\,1\,\star)_6$, con cifre tutte dispari e distinte?

- Quanti sono i numeri naturali che si possono rappresentare in base 6 utilizzando esattamente le cifre del numero $(3\,5\,2\,1\,4)_6$?

- Quanti sono i numeri naturali che si possono rappresentare in base 6 utilizzando esattamente le cifre del numero $(3\,5\,5\,3\,5)_6$?

- Si rappresenti in base 6 il numero 2301.

Esercizio 3. Si determinino tutti gli interi a che siano soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} a \equiv 5 \ (\text{mod. } 8) \\ 2a \equiv 8 \ (\text{mod. } 14) \\ 7a \equiv 14 \ (\text{mod. } 21) \\ |a| \leq 200 \end{cases}$$

Esercizio 4. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 11:

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 3 \\ x + 2y + 5z = 2 \\ x + 8y + z = 0 \end{cases}$$

<u>Esercizio 5.</u> Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

Esercizio 6. Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$

Esercizio 7. Si dica se la corrispondenza $\mathcal{R} = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, x + |y| = 1\}$ è un'applicazione, motivando la risposta.

Esercizio 8. Si considerino le applicazioni

$$f \,:\, n \in \mathbb{N} \,\mapsto\, n + 7 \in \mathbb{Z}, \qquad g \,:\, m \in \mathbb{Z} \,\mapsto\, (m-7)^2 \in \mathbb{N}.$$

• Si dica se f è iniettiva, e perché.

• Si dica se f è suriettiva, e perché.

• Si dica se g è iniettiva, e perché.

• Si dica se g è suriettiva, e perché.

• Si determinino le applicazioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$, e si stabilisca se esse sono iniettive, suriettive o biettive, motivando le risposte.

• Si calcoli:

$f^{-1}(\{5\,,\,6\}) =$

$g(\{2\,,\,3\}) =$

$g^{-1}(\{0\,,\,1\}) =$

Esercizio 9. Si consideri l'operazione $\perp$ definita ponendo

$$a \perp b = a + b + 4ab,$$

per ogni $a,\, b \in \mathbb{Q}$.

• Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, \perp)$ è un monoide commutativo.

• Quali sono gli elementi simmetrizzabili del monoide $(\mathbb{Q}, \perp)$?

• Motivando la risposta, si stabilisca se $(\mathbb{N}, \perp)$ è un sottomonoide di $(\mathbb{Q}, \perp)$.

Esercizio 10. Si consideri l'insieme $S = \{2n+3 : n \in \mathbb{N}\}$, e la relazione $\sqsubseteq$ definita in S ponendo
$$2n+3 \sqsubseteq 2m+3 \Leftrightarrow n|m,$$
dove $|$ è la relazione del *divide* in $\mathbb{N}$.

• Si dimostri che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in S.

• Si precisi se $(S, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, e se è ben ordinato.

• Si dimostri che $(S, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

• Si specifichi se esistono, e quali sono, il minimo ed il massimo di $(S, \sqsubseteq)$.

• Si disegni il diagramma di Hasse del sottoinsieme $T = \{5\,, 7\,, 9\,, 11\,, 13\,, 15\,, 27\}$ di S.

• Sia $U = \{9\,, 11\}$. Si calcoli:

$\sup_S(U)$=

$\inf_S(U)$=

Esercizio 11. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 3$ risulta

$$\sum_{k=3}^{n}(k^2 - k - 1) = \frac{n^3 - 4n}{3}.$$

Esercizio 12. Sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si definisca esplicitamente una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ tale che l'insieme quoziente $\mathbb{N}/_{\mathcal{R}}$ sia costituito esattamente da 2 classi di equivalenza, una finita e l'altra infinita.