Matematica Discreta

Dott. C. Delizia

Seconda Prova in Itinere

9 Febbraio 2005

Esercizio 1. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 2. Si determini il minimo intero positivo *dispari* a tale che simultaneamente risulti $3a \equiv 21 \pmod{27}$ e $3a \equiv 15 \pmod{33}$.

Esercizio 3. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 11:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 4. Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$

Esercizio 5. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{Z}_{13}).$$

Esercizio 6. Nell'insieme $V = \{5h + 1 \,:\, h \in \mathbb{Z}\}$ si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$5h + 1 \sqsubseteq 5k + 1 \iff h = k \text{ oppure } |h| < |k|,$$

dove $<$ indica la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$.
• Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in V.
• Si stabilisca se $(V, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, motivando la risposta.
• Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di $(V, \sqsubseteq)$.
• Si stabilisca se $(V, \sqsubseteq)$ è un reticolo, e perchè.
• Sia $W = \{-19, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21\}$. Si disegni il diagramma di Hasse di $(W, \sqsubseteq)$.

Esercizio 7. Si consideri l'operazione $\perp$ definita ponendo

$$a \perp b \;=\; a + b - \frac{1}{2},$$

per ogni a, $b \in \mathbb{Q}$.
• Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, \perp)$ è un gruppo abeliano, **evidenziando** in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Q}$.
• Si dimostri che l'applicazione
$$\sigma \;:\; a \in \mathbb{N} \;\mapsto\; a + \tfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$
è un omomorfismo di monoidi tra $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{Q}, \perp)$.

Esercizio 8. Si consideri il gruppo $(U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot)$ degli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_{14}, \cdot)$.
• Si scriva la tabella moltiplicativa di $(U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot)$.
• Si stabilisca se $U(\mathbb{Z}_{14})$ è una parte stabile di $(\mathbb{Z}_{14}, +)$.