Matematica Discreta

Dott. C. Delizia

Seconda Prova in Itinere

9 Febbraio 2006

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{Z}_5).$$

Esercizio 2. Si determinino tutti gli interi a che siano soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} a \equiv 4 \pmod{7} \\ 2a \equiv 10 \pmod{6} \\ 3a \equiv 9 \pmod{12} \\ |a| \leq 100 \end{cases}$$

Esercizio 3. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 4y + 2z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

<u>**Esercizio 4.**</u> Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{6} \\ \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$

<u>**Esercizio 5.**</u> Si consideri l'operazione $\perp$ definita ponendo

$$a \perp b \;=\; a + b + 5,$$

per ogni a, $b \in \mathbb{Z}$.

• Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \perp)$ è un gruppo abeliano, **evidenziando** in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Z}$.

• Si dimostri che i gruppi $(\mathbb{Z}, +)$ (dove $+$ denota la usuale somma tra numeri interi) e $(\mathbb{Z}, \perp)$ sono isomorfi.

<u>Esercizio 6.</u> Si consideri il monoide $(M_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ delle matrici quadrate di ordine 2 su $\mathbb{Z}_2$ con il prodotto righe per colonne.

• Quanti sono gli elementi di $M_2(\mathbb{Z}_2)$?

• Quanti e quali sono gli elementi simmetrizzabili del monoide $(M_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$?

• Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$A \, \mathcal{R} \, B \iff |A| = |B|,$$

dove $|A|$ denota il determinante della matrice A, è una relazione di equivalenza in $M_2(\mathbb{Z}_2)$.

• Quante e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $M_2(\mathbb{Z}_2)/_{\mathcal{R}}$?

• Si dimostri che la relazione $\mathcal{R}$ è compatibile con il prodotto righe per colonne.

Esercizio 7. Nell'insieme $\mathbb{N}^\star$ dei numeri naturali positivi si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 4a < 3b,$$

dove $<$ indica la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

• Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}^\star$.

• Si stabilisca se $(\mathbb{N}^\star, \sqsubseteq)$ è ben ordinato, motivando la risposta.

• Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di $(\mathbb{N}^\star, \sqsubseteq)$.

• Si stabilisca se $(\mathbb{N}^\star, \sqsubseteq)$ è un reticolo, e perchè.

• Sia $S = \{a \in \mathbb{N}^\star \,:\, a \leq 12\}$. Si disegni il diagramma di Hasse di $(S, \sqsubseteq)$.

<u>Esercizio 8.</u> Si consideri il l'anello $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ degli interi modulo n. Si dimostri che un elemento $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ è invertibile se e solo se esso non è divisore dello zero.

<u>Esercizio 9.</u> Si consideri il l'anello $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$ degli interi modulo 21.

• Motivando la risposta, si stabilisca se $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$ è un campo.

• Si determini l'insieme D dei divisori dello zero di $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$.

• Motivando la risposta, si stabilisca se D è una parte stabile di $(\mathbb{Z}_{21}, \cdot)$.