Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Terzo Appello — 11 febbraio 2010

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**
☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**

Esercizio 1.

- Si consideri la formula ben formata
$$P = \neg(A \vee B) \vee \neg(A \to \neg B).$$
Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è una tautologia.

  Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\vee$.

- Si determini il valore di verità di ciascuna delle seguenti proposizioni:

  P_1 : se 5 è multiplo di 2 allora il Messico si trova in Africa;

  P_2 : se Roma non è la capitale d'Italia allora 8 è divisibile per 2;

  P_3 : se Fisciano è in provincia di Salerno allora 100 non è un quadrato;

  P_4 : se 7 è un numero primo allora $7 \equiv 2 \pmod 5$.

Esercizio 2. Si determinino una formula in forma normale congiuntiva ed una in forma normale disgiuntiva equivalenti alla seguente formula ben formata:

$$Q = ((A \to C) \to \neg B) \to B \vee C.$$

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$R = \exists x A(x) \wedge \forall y B(y) \to C(z) \vee \forall y A(y).$$

Esercizio 4. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:

$$2^n > n^2 \text{ per ogni numero naturale } n \geq 5.$$

Esercizio 5. Si consideri l'applicazione

$$f : x \in \mathbb{Q} \longmapsto \frac{4x-3}{5} \in \mathbb{Q}.$$

- Si stabilisca se f è invertibile, e in caso affermativo se ne individui l'inversa.

- Si calcoli la controimmagine $f^{-1}(\mathbb{Z})$.

Si consideri poi l'applicazione $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita ponendo

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 1/x & \text{se } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Si determini l'applicazione composta $f \circ g$.

- Si dimostri che $f \circ g$ non è suriettiva.

Esercizio 6. Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri interi $a = 354$ e $b = 426$, e si individuino due interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 7. Si consideri l'insieme $A = \{10, 11, 12, \ldots, 30\}$ dei numeri compresi tra 10 e 30. Motivando la risposta, si stabilisca quali delle seguenti relazioni in A sono d'equivalenza. Per ciascuna di queste ultime si determini poi l'insieme quoziente e il suo ordine.

- $a\,\mathcal{R}_1\,b \iff a^2 + b^2$ è pari;

- $a\,\mathcal{R}_2\,b \iff ab$ è pari;

- $a\,\mathcal{R}_3\,b \iff$ il più piccolo fattore primo di a coincide col più piccolo fattore primo di b.

Esercizio 8. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ si definisca una relazione $\sqsubseteq$ ponendo

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \iff a \leq c \text{ e } b|d,$$

dove $\leq$ e $|$ denotano rispettivamente le relazioni d'ordine *usuale* e del *divide* tra numeri naturali.

- Si dimostri che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- Si stabilisca se $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.

- Si stabilisca se $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

- Si individuino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq)$.

- Si disegni il diagramma di Hasse del sottoinsieme $T = \{(a, b) : 1 \leq a, b \leq 3\} \cup \{(3, 6)\}$ di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- Si dimostri che $(T, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

- Motivando la risposta, si stabilisca se il reticolo $(T, \sqsubseteq)$ è distributivo.

Esercizio 9. Si fornisca un esempio per ciascuna delle strutture algebriche sottoelencate, specificando con precisione l'insieme e le operazioni considerate:

- un semigruppo commutativo che non sia un monoide;
- un monoide non commutativo, che non sia un gruppo;
- un campo finito.

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita ponendo

$$f((x, y, z)) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z),$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- Si provi che f è lineare.
- Si individui il nucleo $Ker\, f$, una sua base e la sua dimensione.

Esercizio 11. Si determini la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ avente i seguenti autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, e relativi autovettori $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (0, 1)$.

Esercizio 12. Nello spazio affine bidimensionale siano assegnati i punti

$$A = (1, 2), \qquad B = (1, 1), \qquad C = (2, 1), \qquad D = (-1, -1).$$

- Si determinino le equazioni parametriche della retta r passante per i punti A e B e della retta s passante per i punti C e D.

- Si stabilisca se r e s sono parallele o incidenti e, in quest'ultimo caso, si determinino le coordinate del punto d'intersezione.