

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

**Terzo Appello — 23 febbraio 2011**

---

**IMPORTANTE:** indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

- Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
  - Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
  - Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
  - Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**
- 

**Esercizio 1.** Ragionando per induzione, si dimostri che per ogni intero  $n > 6$  risulta

$$2^n > n^2 + 4n + 5.$$

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione  $f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{5x-7}{6} \in \mathbb{Q}$ .

- Si dimostri che  $f$  è biettiva.

- Si determini l'inversa  $f^{-1}$  di  $f$ .

- Si calcoli:

$$f(\mathbb{N}_0) =$$

$$f^{-1}(\mathbb{N}_0) =$$

**Esercizio 3.** Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z}_5).$$

**Esercizio 4.** Si determinino tutte le soluzioni intere dell'equazione congruenziale

$$135x \equiv 60 \pmod{620}.$$

**Esercizio 5.** Nell'insieme  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$  dei numeri naturali compresi tra 1 e 10 si consideri la relazione  $\mathcal{R}$  definita in  $A$  ponendo

$$a \mathcal{R} b \iff a = b \text{ oppure } ab \text{ dispari.}$$

- Si dimostri che  $\mathcal{R}$  è una relazione di equivalenza in  $A$ .

- Si determini la partizione di  $A$  individuata da  $\mathcal{R}$ .

**Esercizio 6.** Descrivendo il procedimento utilizzato, si stabilisca quanti sono i numeri interi positivi minori di 500 e divisibili per 2 o per 3, ma non per 6.

**Esercizio 7.** Sia  $A = \{a, b, c\}$  un insieme di ordine 3, e sia  $B$  l'insieme di tutte le applicazioni di  $A$  in  $A$ . Si consideri poi la struttura algebrica  $(B, \circ)$ , dove  $\circ$  denota la usuale composizione di applicazioni.

- Si dimostri che  $(B, \circ)$  è un monoide.

- Giustificando la risposta, si stabilisca se  $(B, \circ)$  è commutativo.

- Si determini l'ordine del gruppo degli elementi simmetrizzabili del monoide  $(B, \circ)$ .



**Esercizio 9.** Si determini la matrice  $A \in M_2(\mathbb{R})$  avente autovalori  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 2$ , e relativi autovettori  $v_1 = (1, -1)$  e  $v_2 = (1, 1)$ .

**Esercizio 10.** Sul campo  $\mathbb{Z}_7$ , si consideri lo spazio vettoriale  $(\mathbb{Z}_7)^4$ .

- Si dimostri che il sottoinsieme  $V = \{(a, b, c, d) \in (\mathbb{Z}_7)^4 : b = 0, c = -d\}$  è un sottospazio di  $(\mathbb{Z}_7)^4$ .

- Si determinino la dimensione di  $V$  e una sua base.

**Esercizio 11.** Nello spazio affine bidimensionale siano assegnati i punti

$$A = (0, 1), \quad B = (2, 4), \quad C = (-2, 1), \quad D = (-1, 2).$$

- Si determinino le equazioni parametriche della retta  $r$  passante per i punti  $A$  e  $B$  e della retta  $s$  passante per i punti  $C$  e  $D$ .

- Si stabilisca se  $r$  e  $s$  sono parallele o incidenti e si determinino le coordinate dell'eventuale punto d'intersezione.

### Esercizio 12.

- Si scriva la tavola di verità della formula ben formata

$$P = A \wedge B \rightarrow \neg A \vee \neg B.$$

- Si scriva una formula equivalente a  $P$  usando solo i connettivi  $\neg$  e  $\wedge$ .

- Si determini una formula in forma normale congiuntiva equivalente a  $P$ .

- Indicando con una crocetta la risposta scelta, si determini il valore di verità di ciascuna delle seguenti proposizioni:

$P_1$  : se 1 è primo allora Tenerife è un'isola;

VERO             FALSO

$P_2$  : se in un campo ogni elemento non nullo è invertibile allora Londra si trova in Inghilterra;

VERO             FALSO

$P_3$  : se la somma in  $\mathbb{Z}$  non è commutativa allora 1234567890 è divisibile per 2346;

VERO             FALSO

$P_4$  : se 5 e 7 sono coprimi allora è possibile calcolare il determinante di una matrice  $3 \times 2$ .

VERO             FALSO