Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Secondo Appello — 9 febbraio 2012

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Ragionando per induzione, si dimostri che per ogni intero $n > 1$ risulta

$$2^n + 4^n < 5^n.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : x \in \mathbb{Q} \longmapsto \frac{3x+5}{4} \in \mathbb{Q}$.

- Si dimostri che f è biettiva.

- Si determini l'inversa f^{-1} di f.

- Si calcoli:

  $f(\mathbb{N}_0) =$

  $f^{-1}(\mathbb{N}_0) =$

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7).$$

Esercizio 4. Si dimostri che l'equazione congruenziale

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

ammette soluzioni se e solo se $\mathrm{MCD}(a, n)$ divide b.

Esercizio 5. Siano A un insieme non vuoto e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in A. Con $a, b, c \in A$ si dimostri che

$$[a]_{\mathcal{R}} \cup [b]_{\mathcal{R}} \subseteq [c]_{\mathcal{R}} \Longrightarrow a \,\mathcal{R}\, b.$$

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato, si stabilisca quanti sono i numeri interi positivi minori di 301 e divisibili per 5 o per 6, ma non per 30.

Esercizio 7. Per ciascuna dei seguenti tipi di struttura algebrica si fornisca un esempio (se esiste), oppure si spieghi per quale motivo non ne esistono:

- un semigruppo non commutativo;
- un monoide che non sia un semigruppo;
- un monoide commutativo che non sia un gruppo abeliano;
- un anello finito che non sia un dominio d'integrità;
- un campo che non sia un dominio d'integrità;
- un dominio d'integrità infinito che non sia un campo;
- un anello unitario non commutativo.

Esercizio 8. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$, e si consideri l'insieme ordinato $(A, |\,)$, dove $|$ denota la relazione del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(A, |\,)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |\,)$ è totalmente ordinato.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $(A, |\,)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |\,)$ è un reticolo.

Esercizio 9. Si determini la matrice $A \in M_2(\mathbb{Q})$ avente autovalori $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, e relativi autovettori $v_1 = (3, -1)$ e $v_2 = (2, 2)$.

Esercizio 10. Sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{Q}^6$.

- Si dimostri che il sottoinsieme

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{Q}^6 : x_1 = x_3 = 0, x_2 + x_4 = x_5\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{Q}^6$.

- Si determinino la dimensione di V e una sua base.

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano assegnati i punti

$$A = (2, 0, 1), \qquad B = (-1, 1, 0), \qquad C = (-3, 1, -1), \qquad D = (1, 3, 0).$$

- Si determinino le equazioni parametriche della retta r passante per i punti A e B e della retta s passante per i punti C e D.

- Si stabilisca se r e s sono parallele, incidenti o sghembe e si determinino le coordinate dell'eventuale punto d'intersezione.

Esercizio 12.

- Si scriva la tavola di verità della formula ben formata

$$P = (A \to \neg B \vee A) \wedge \neg A.$$

- Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

- Si determini una formula in forma normale congiuntiva equivalente a P.

- Indicando con una crocetta la risposta scelta, si determini il valore di verità di ciascuna delle seguenti proposizioni:

  P_1 : se $\mathrm{MCD}(6, 12) = 2$ allora il Nilo è il fiume più lungo del mondo;
  ☐ VERO ☐ FALSO

  P_2 : se -3 divide 9 allora $-2 \equiv 7 \pmod 9$;
  ☐ VERO ☐ FALSO

  P_3 : se $\mathbb{Z}_6$ è un campo allora in Brasile si parla lo spagnolo;
  ☐ VERO ☐ FALSO

  P_4 : se $x^2 + x + 1 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{Z}_2$ allora è possibile calcolare l'inversa di una matrice 3×2 su $\mathbb{R}$.
  ☐ VERO ☐ FALSO