Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Secondo Appello — 12 febbraio 2013

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n > 2$ risulta

$$\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2(n+1)}{3n}.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2\} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita ponendo $f(x) = (x+2)(x-2)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Considerata l'applicazione $g : n \in \mathbb{N} \longmapsto 2n + 8 \in \mathbb{N}$, si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_4)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini la matrice inversa.

Esercizio 4. Si considerino l'insieme $A = \{a \in \mathbb{N}_0 : a < 20\}$ e la relazione $\mathcal{R}$ su A definita ponendo

$$a\,\mathcal{R}\,b \iff a > 4 \text{ oppure } ab \in A,$$

dove $\leq$ denota l'ordine *usuale* di $\mathbb{N}_0$. Motivando ciascuna risposta, si stabilisca se la relazione $\mathcal{R}$ è:

- riflessiva

- simmetrica

- asimmetrica

- transitiva

Esercizio 5. Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri interi $a = -117$ e $b = -975$, e si individuino due interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 6. Si considerino l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e l'operazione interna $\star$ definita ponendo

$$a \star b \;=\; \max\{a, b\},$$

dove $\max\{a, b\}$ denota il massimo tra a e b nell'ordine *usuale* di $\mathbb{N}$.

- Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{N}, \star)$ è un monoide commutativo.

- Si stabilisca se il sottoinsieme $A = \{2, 3, 4\}$ è una parte stabile di $(\mathbb{N}, \star)$.

- Si stabilisca se il sottoinsieme $(A, \star)$ è un monoide.

- Si determinino tutti i sottomonoidi di $(\mathbb{N}, \star)$.

Esercizio 7. Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre che hanno nella loro rappresentazione decimale esattamente due zeri?

Esercizio 8. Per ogni intero $n \geq 2$ si definisca $A_n = \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\}$, e si consideri l'insieme ordinato $(A_n\,, \leq)$, dove $\leq$ denota l'ordine *usuale* tra numeri naturali.

- Si dimostri che, per ogni $n \geq 2$, A_n è un reticolo dotato di minimo e massimo.

- Si dimostri che, per ogni $n \geq 2$, il reticolo A_n è distributivo.

- Si dimostri che il reticolo A_n è booleano se e solo se $n = 2$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- Si determinino tutti gli autovalori e i relativi autovettori di A su $\mathbb{R}$.

- Si individuino gli autospazi relativi a ciascun autovalore, precisandone una base e la dimensione.

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 10. Si considerino lo spazio vettoriale $(Z_5)^4$ sul campo $\mathbb{Z}_5$, e l'applicazione

$$f : (x, y, z, t) \in (Z_5)^4 \longmapsto (x, 2x, 3x, y + z + t) \in (Z_5)^4.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo K di f.

- Si determinino la dimensione di K e una sua base.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (1, 2, 0), \qquad B = (0, -1, 1), \qquad C = (0, 1, 3).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non appartengono alla stessa retta.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C.

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + \beta' \\ y = 2 - \alpha' \\ z = 3 + \alpha' - \beta' \end{cases}$$

con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.

Esercizio 12.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = \neg A \wedge B \vee (A \to \neg B).$$

  Si scriva la tavola di verità di P.

  Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

- Si determinino due differenti formule ben formate equivalenti a Q:

A	B	C	Q
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0