Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Secondo Appello — 12 febbraio 2014

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n > 6$ risulta

$$14 + 16 + \cdots + 2n = n^2 + n - 42.$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni

$$f : (x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longmapsto x - y \in \mathbb{Z} \qquad\qquad g : z \in \mathbb{Z} \longmapsto |z| + 1 \in \mathbb{N}.$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se g è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva.

- Si calcoli l'immagine $(g \circ f)(\mathbb{N}_p \times \mathbb{N}_d)$

Esercizio 3. Si provi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Z}_3)$$

ha rango 4.

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema:

$$\begin{cases} 65x \equiv 77 \pmod{116} \\ 4x \equiv 8 \pmod{11} \\ |x| \leq 1000 \end{cases}$$

Esercizio 5. Elencandone gli elementi, nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ si determinino:

- una relazione $\mathcal{R}_1$ che sia riflessiva e simmetrica ma non transitiva;

- una relazione $\mathcal{R}_2$ che sia riflessiva e transitiva ma non simmetrica;

- una relazione $\mathcal{R}_3$ che sia simmetrica e transitiva ma non riflessiva.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali dispari di sei cifre di cui esattamente tre sono 0.

Esercizio 7. Sia $A = \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 40\}$, e si consideri l'insieme ordinato $(A, |\,)$, dove $|$ denota la relazione del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |\,)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |\,)$ è un reticolo.

- Si determinino tutti gli elementi minimali e massimali di $(A, |\,)$ e gli eventuli minimo e massimo.

Esercizio 8. Sia $A = \{1, 2, 3\}$, e si consideri la struttura algebrica $(\mathcal{P}(A), \setminus\,)$, dove $\mathcal{P}(A)$ denota l'insieme delle parti di A, e $\setminus$ l'operazione di differenza tra insiemi.

- Si stabilisca se la struttura $(\mathcal{P}(A), \setminus\,)$ è commutativa.

- Si stabilisca se la struttura $(\mathcal{P}(A), \setminus\,)$ è un semigruppo.

- Si determini un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A)$ di ordine 4 che sia stabile rispetto all'operazione $\setminus$.

Esercizio 9. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$$

ha i seguenti autovalori: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$.

- Per ciascun autovalore, si determini il relativo autospazio, la sua dimensione e una sua base.

- Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si risolva il seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_5$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine bidimensionale siano dati i punti

$$A = (2, 1), \qquad B = (1, -2).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche della retta r per i punti A e B.

- Data la retta r' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -2 + t' \end{cases}$$

con $t' \in \mathbb{R}$, si stabilisca se le rette r e r' sono incidenti e, in caso affermativo, si determinino le coordinate del punto di intersezione.

Esercizio 12.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = (A \ \to \ \neg B \vee A) \ \to B \wedge A.$$

Si scriva la tavola di verità di P.

Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\vee$.

- Si determinino due differenti formule ben formate equivalenti a Q:

A	B	C	Q
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0