Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

Docente: C. Delizia

Secondo appello — 10 febbraio 2015

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 0$ risulta

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = n^2 + 4n + 4.$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni

$$f : (x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longmapsto 2x - y \in \mathbb{Z} \qquad\qquad g : z \in \mathbb{Z} \longmapsto |z - 1| \in \mathbb{N}_0.$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z})$$

è invertibile, e in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema:

$$\begin{cases} 24x \equiv 18 \pmod{66} \\ 15x \equiv 35 \pmod{70} \\ 8x \equiv 7 \pmod{9} \\ |x| \leq 1500 \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ si determinino tutte le relazioni di equivalenza $\mathcal{R}$ tali che $1\,\mathcal{R}\,2$ e $[1]_{\mathcal{R}} \neq [3]_{\mathcal{R}}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali **dispari** di cinque cifre di cui almeno due sono 0.

Esercizio 7. Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36, 72\}$, e si consideri l'insieme ordinato $(A, |\,)$, dove $|$ denota la relazione del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |\,)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |\,)$ è totalmente ordinato.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |\,)$ è un reticolo.

Esercizio 8. Sia $A = \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi dispari. Si consideri l'operazione $\star$ definita ponendo, per ogni a, $b \in A$,

$$a \star b \ = \ a + b + 1.$$

- Si dimostri che la struttura algebrica $(A, \star)$ è un gruppo abeliano, evidenziando in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in A$.

- Si stabilisca se l'insieme $\mathbb{N}_d$ dei numeri naturali dispari è un sottomonoide di $(A, \star)$.

Esercizio 9. Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si risolva il seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_7$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x + 5z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (1, 2, 3), \qquad B = (2, -1, 0).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche della retta r per i punti A e B.

- Si consideri la retta r' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = -3 + 2t' \end{cases}$$

con $t' \in \mathbb{R}$ e si stabilisca se le rette r e r' sono parallele, incidenti o sghembe.

Esercizio 12. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$, e l'applicazione

$$f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (x_1, x_2, x_3 + 2x_4, 0, x_1 - x_2) \in \mathbb{R}^5.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo di f e la sua dimensione.

- Si determini l'immagine di f e la sua dimensione.