Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Proff. F. Bottacin, C. Delizia

Quarto Appello — 16 giugno 2009

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e fare **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Mat. Discreta e Logica Matem. (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**
☐ Matematica Discreta vecchio ordinamento (9 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**

Esercizio 1. (a) Si scriva la tavola di verità della seguente formula ben formata e si determini se essa è una tautologia:

$$P = (\neg A \to (B \to A)) \vee (A \to B) \wedge A.$$

(b) Si scriva una formula equivalente a P usando solo il connettivo $\to$.

(c) Si scriva una formula ben formata Q che abbia la seguente tavola di verità:

A	B	C	Q
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Esercizio 2. Si determinino una formula in forma normale congiuntiva ed una in forma normale disgiuntiva equivalenti alla seguente formula ben formata:

$$(A \wedge \neg B \to C) \wedge \neg(C \to A \wedge B).$$

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$\neg(\forall x\, A(x) \vee \neg\exists y\, B(y)) \to \exists x\, (A(x) \to B(x)) \wedge \neg\forall y\, C(y).$$

Esercizio 4. Si dimostri che, con A, B e C insiemi arbitrari, si ha:

$$(A \cup B) \setminus (A \cup C) = B \setminus (A \cup C).$$

Esercizio 5. Si confrontino i numeri naturali $a = (21110012)_3$ e $b = (1110313)_4$, stabilendo se $a < b$, $a > b$ oppure $a = b$.

Esercizio 6. Si considerino le applicazioni:

$$f : x \in 5\mathbb{Z} \longmapsto x^2 \in 25\mathbb{Z}, \qquad g : z \in 25\mathbb{Z} \longmapsto \frac{z}{5} \in 5\mathbb{Z}.$$

- Si calcoli:

  $f(50\mathbb{Z}) =$
  $f^{-1}(\{0, 25, -25, 50\}) =$
  $g(\{0, 25, -50\}) =$
  $g^{-1}(5\mathbb{Z} \setminus \{0, 5\}) =$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se g è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se g è suriettiva.

- Si determini la composta $g \circ f$.

- Utilizzando le proprietà di f e g, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

Esercizio 7. Si consideri l'insieme W costituito dai numeri naturali della forma $2^n 3^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$:

$$W = \{2^n 3^m : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

- Si verifichi che è d'ordine la relazione $\sqsubseteq$ definita in W ponendo:

$$2^n 3^m \sqsubseteq 2^s 3^t :\iff (n = s) \text{ e } (m \leq t),$$

  dove il $\leq$ indica la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

- Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato e se è ben ordinato.

- Si determinino, se esistono, $\min W$, $\max W$, tutti gli elementi minimali e tutti gli elementi massimali di $(W, \sqsubseteq)$.

- Considerati i sottoinsiemi $F = \{1, 3, 9\}$ e $G = \{2, 4, 12\}$ di W, si disegni il diagramma di Hasse degli insiemi ordinati $(F, \sqsubseteq)$ e $(G, \sqsubseteq)$.

Esercizio 8. (a) Si dimostri che ogni campo è un dominio d'integrità.

(b) Si provi con un controesempio che un dominio d'integrità può non essere un campo.

Esercizio 9. Si determini il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Z}_7).$$

Esercizio 10. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

si determinino, se esistono, una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 11. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v = (2, 3, 1), \qquad w = (1, -1, 3).$$

Si dimostri che v e w sono linearmente indipendenti e si determini un vettore u tale che i tre vettori u, v e w formino una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 12. Nel piano affine siano dati i punti

$$A = (-1, 15), \qquad B = (7, 2), \qquad C = (-2, 7), \qquad D = (5, -38).$$

Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B e della retta s passante per C e D. Si stabilisca poi se r ed s sono parallele o incidenti, e in quest'ultimo caso si determinino le coordinate del punto di intersezione.