Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Quarto Appello — 21 giugno 2010

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**
☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**

Esercizio 1. Si consideri la formula ben formata

$$P = \neg(A \vee B) \rightarrow \neg B \wedge A.$$

- Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è una tautologia.

- Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\vee$.

Esercizio 2. Si scrivano due differenti formule ben formate che abbiano la stessa tavola di verità di Q:

A	B	C	Q
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$R = \forall x A(x) \vee \exists y B(y) \to C(z) \vee \forall y A(y).$$

Esercizio 4. Siano A, B e C insiemi.

- Si provi che $A \subseteq C \Longrightarrow C \setminus (B \setminus A) = (C \setminus B) \cup A$.

- Si dimostri con un controesempio che in assenza dell'ipotesi $A \subseteq C$ la suddetta uguaglianza è in generale falsa.

Esercizio 5. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 4x \equiv 6 \pmod{10} \\ 3x \equiv 5 \pmod{7} \\ 5x \equiv 8 \pmod{9} \\ |x| \leq 250. \end{cases}$$

Esercizio 6. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7).$$

Esercizio 7. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Si stabilisca se f è iniettiva.

- Si stabilisca se f è suriettiva.

- Si calcoli:

  $f^{-1}(\mathbb{Z}) =$

  $f^{-1}(8\mathbb{Z}) =$

- Si determini l'applicazione composta $f \circ f$.

- Si stabilisca se $f \circ f$ è iniettiva.

- Si stabilisca se $f \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 8. Si consideri l'insieme $A = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ dei numeri naturali compresi tra 1 e 8, e si rappresentino gli elementi di A in base 2. Per ogni $a \in A$, sia $\sigma(a)$ il numero di cifre della rappresentazione binaria di a. Si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita in A ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } \sigma(a) < \sigma(b),$$

dove $\leq$ denota l'ordinamento usuale dei numeri naturali.

- Si dimostri che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in A.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \sqsubseteq)$.

- Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è ben ordinato.

- Si determini l'estremo inferiore in A del sottoinsieme $\{4, 5\}$.

- Si determini l'estremo superiore in A del sottoinsieme $\{4, 5\}$.

- Sia $B = A \setminus \{3\}$. Si dimostri che $(B, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

- Motivando la risposta, si stabilisca se il reticolo $(B, \sqsubseteq)$ è distributivo.

Esercizio 9. Si considerino l'insieme di numeri naturali $A = \{1, 2, 3, 4\}$, e l'operazione interna $\star$ in A definita ponendo

$$a \star b = \min\{a, b\}$$

per ogni $a, b \in A$ (dove il minimo è calcolato considerando l'ordinamento usuale dei numeri naturali).

- Si scriva la tavola di moltiplicazione di $(A, \star)$.

- Si dimostri che la struttura $(A, \star)$ è un monoide commutativo.

- Quali sono gli elementi simmetrizzabili del monoide $(A, \star)$?

Esercizio 10. Nello spazio affine bidimensionale siano assegnati i punti

$$A = (1, 2), \qquad B = (-1, -1), \qquad C = (0, 1), \qquad D = (2, -1).$$

- Si determinino le equazioni parametriche della retta r passante per i punti A e B e della retta s passante per i punti C e D.

- Si stabilisca se r e s sono parallele.

Esercizio 11. Si stabilisca se i tre vettori

$$v_1 = (1,1,1), \qquad v_2 = (2,1,-1), \qquad v_3 = (3,0,0)$$

sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 12. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5).$$

- Si determinino gli autovalori di A su $\mathbb{Z}_5$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile su $\mathbb{Z}_5$.

- Si individuino gli autospazi relativi a ciascun autovalore, precisandone una base e la dimensione.