Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Quarto Appello — 14 giugno 2011

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**

☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 3$ risulta

$$2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 8.$$

Esercizio 2. Si considerino l'applicazione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

e l'applicazione $g : y \in \mathbb{N}_0 \longmapsto 1 - y \in \mathbb{Z}$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se g è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se g è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7).$$

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $A = \{100\,, 101\,, \ldots\,, 999\}$ dei numeri naturali compresi tra 100 e 999. Per ogni $a \in A$ sia $\sigma(a)$ la somma delle 3 cifre di a. Si consideri poi la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ in A definita ponendo

$$a\,\mathcal{R}\,b \iff \sigma(a) = \sigma(b).$$

- Si specifichi quali sono gli elementi di $[211]_{\mathcal{R}}$.

- Motivando la risposta, si indichi quanti sono gli elementi dell'insieme quoziente $A/_{\mathcal{R}}$.

Esercizio 5. Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri interi $a = 532$ e $b = 644$, e si individuino due interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 6. Si consideri il gruppo $G = \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{10})$ degli elementi simmetrizzabli del monoide $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$.

- Si scrivano gli elementi di G.

- Si compili la tavola di moltiplicazione di $(G, \cdot)$.

- Si determini un sottogruppo di ordine 2 di G.

Esercizio 7. Descrivendo il procedimento utilizzato per ottenere la risposta, si precisi quanti sono i numeri naturali che ammettono in base 6 una rappresentazione di 6 cifre, delle quali al massimo due siano zeri.

Esercizio 8. Si consideri l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36\}$, ordinato mediante la relazione $|$ del *divide*.

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(A, |)$.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $(A, |)$.

- Si determini l'estremo inferiore in A del sottoinsieme $\{4, 18\}$.

Esercizio 9. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 4x+z=1 \\ y+2z=5. \end{cases}$$

Esercizio 10. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$, e l'applicazione

$$f:(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \longmapsto (a-c\,,\,0\,,\,b+d\,,\,c-a\,,\,0)\in\mathbb{R}^5.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Denotato con K il nucleo di f, si determinino la dimensione e una base di K.

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (1, 1, 1), \qquad B = (1, 1, 0), \qquad C = (-2, 0, -2).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non appartengono alla stessa retta.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C.

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha' + \beta' \\ y = \beta' \\ z = 2 + \alpha' \end{cases}$$

con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.

Esercizio 12.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = A \wedge \neg A \to B \vee (A \ \to \ B).$$

Giustificando la risposta, si stabilisca se P è una contraddizione.

Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

- Si determini una formula in forma normale disgiuntiva con la stessa tavola di verità di Q:

A	B	C	Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0