Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Terzo Appello — 19 giugno 2012

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Con A, B e C insiemi arbitrari, si dimostri che

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \iff A \subseteq C.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita ponendo $f((x, y)) = (x + y, x - y)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Considerata l'applicazione $g : n \in \mathbb{N}_0 \longmapsto (n, -n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si determini l'applicazione composta $f \circ g$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ g$ è suriettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ g$ è iniettiva.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{Z}_5).$$

Esercizio 4. Sia $A = \{a, b, c\}$ un insieme di ordine 3. Motivando la risposta, si stabilisca quante diverse relazioni di equivalenza è possibile definire in A.

Esercizio 5. Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri interi $a = 468$ e $b = -680$, e si individuino due interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 6. Si determini il gruppo $U(\mathbb{Z}_{10})$ degli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$ e se ne scriva la tavola di moltiplicazione.

Esercizio 7. Si calcoli quanti sono i numeri naturali di 11 cifre nella cui rappresentazione decimale compare quattro volte la cifra 3, tre volte la cifra 5, due volte la cifra 1, una volta la cifra 9 e una volta la cifra 0.

Esercizio 8. Si consideri il sottoinsieme $A = \{1, 2, 3, 4, 12, 24\}$ di $\mathbb{N}$.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |\,)$, dove $|$ denota l'ordine indotto su A dalla relazione del *divide* tra numeri naturali.

• Si dimostri che l'insieme ordinato $(A, |\,)$ è un reticolo.

• Nel reticolo $(A, |\,)$ si effettuino i seguenti calcoli:

$(2 \wedge 3) \vee 4 =$

$(2 \vee 4) \wedge (3 \vee 4) =$

• Motivando la risposta, si stabilisca se il reticolo $(A, |\,)$ è distributivo.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$

- Si determinino tutti gli autovalori e i relativi autovettori di A su $\mathbb{Q}$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 10. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottoinsieme

$$K = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+c=d,\, b=-d\}.$$

- Si dimostri che K è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

- Si determini una base di K.

- Si determini la dimensione di K.

- Posto $v_1 = (2,-5,3,5)$, $v_2 = (2,-6,4,6)$, $v_3 = (3,-6,3,6)$, si stabilisca **motivando la risposta** se il sottoinsieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ di K è linearmente dipendente o indipendente.

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (0, -1, 0), \qquad B = (-1, 1, 1), \qquad C = (2, 0, 1).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non appartengono alla stessa retta.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C.

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha' + 4\beta' \\ y = 3\alpha' + 2\beta' \\ z = 1 + 2\alpha' + 2\beta' \end{cases}$$

con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.

Esercizio 12.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = (C \lor D \to \neg D) \land C.$$

  Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è soddisfacibile.

- Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\land$.

- Giustificando la risposta, si stabilisca se le formule ben formate $(B \land \neg A \to \neg B \lor C \land D) \to A \lor \neg A$ e $A \land \neg A$ sono equivalenti.

- Si scriva una formula in forma normale congiuntiva equivalente a P.