

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Terzo appello — 23 giugno 2014

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

- Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
- Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
- Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
- Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 1$ il numero

$$n^2 + 7n - 1$$

è dispari.

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni

$$f : x \in \mathbb{Z} \mapsto 2x - 3 \in \mathbb{Z}$$

$$g : y \in \mathbb{Z} \mapsto y^2 - 1 \in \mathbb{Z}.$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.
- Motivando la risposta, si stabilisca se g è iniettiva.
- Si determini la controimmagine $g^{-1}(\mathbb{N})$.
- Si determini l'applicazione composta $f \circ g$.
- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ g$ è iniettiva.
- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ g$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini la matrice inversa.

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere dell'equazione congruenziale

$$66x \equiv 15 \pmod{105}.$$

Esercizio 5. Sia $A = \{a, b, c, d\}$. Si determinino tutte le relazioni di equivalenza \mathcal{R} in A tali che $(b, c) \in \mathcal{R}$ e $(a, d) \notin \mathcal{R}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali positivi minori di 200 che sono divisibili per almeno uno tra 6, 8 e 9.

Esercizio 7. Nell'insieme A dei numeri naturali positivi ≤ 7 si consideri la relazione \sqsubseteq definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 4a < 3b,$$

dove $<$ indica la relazione d'ordine usuale in \mathbb{N} .

- Si verifichi che \sqsubseteq è una relazione d'ordine in A .

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato (A, \sqsubseteq) .

- Motivando la risposta, si stabilisca se (A, \sqsubseteq) è totalmente ordinato.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di (A, \sqsubseteq) .

- Motivando la risposta, si stabilisca se (A, \sqsubseteq) è un reticolo.

Esercizio 8. Si consideri, nell'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali, l'operazione binaria \star definita ponendo

$$a \star b = a + b + \frac{2}{3}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$.

- Si provi che la struttura algebrica (\mathbb{Q}, \star) è un gruppo abeliano, evidenziandone l'elemento neutro e il simmetrico di ogni elemento.

- Motivando la risposta, si stabilisca se il sottoinsieme \mathbb{Z} è stabile in (\mathbb{Q}, \star) .

Esercizio 9. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

si determinino, se esistono, una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 10. Si estraggano due basi di \mathbb{R}^3 dal seguente insieme di vettori di \mathbb{R}^3 :

$$\left\{ \left(1, \frac{1}{2}, 0\right), (0, 1, 0), (0, \sqrt{2}, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti non allineati

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (-1, 0, 1), \quad C = (2, 3, 0).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C .

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \alpha' - \beta' \\ y = 2 + \beta' \\ z = 1 + \alpha' + \beta' \end{cases}$$

con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.

Esercizio 12.

- Barrando la casella corrispondente, si stabilisca il valore di verità della seguente proposizione:

Se 5 è un numero pari e $\text{MCD}(4, 6) = 2$, allora il numero 5499802 è primo.

VERO

FALSO

- Si consideri la formula ben formata

$$P = \neg A \wedge B \rightarrow A.$$

Si scriva la tavola di verità di P .

Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi \neg e \vee .

- Si determinino una formula in forma normale congiuntiva e una formula in forma normale disgiuntiva equivalenti a P .