Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

DOCENTE: C. DELIZIA

Terzo appello — 24 giugno 2015

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n > 0$ risulta

$$\sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1.$$

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni

$$f : n \in \mathbb{N}_0 \longmapsto \frac{n}{n+1} \in \mathbb{Q} \qquad\qquad g : x \in \mathbb{Q} \longmapsto x - 1 \in \mathbb{Q}.$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se g è suriettiva.

- Si determini la controimmagine $g^{-1}(\mathbb{N})$.

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_4)$$

è invertibile, e in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 731x \equiv 14 \pmod{220} \\ 30x \equiv 25 \pmod{35}. \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$a\mathcal{R}b \iff ab \geq 0.$$

Si stabilisca se $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali di 6 cifre che hanno almeno una cifra pari.

Esercizio 7. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ dei numeri naturali minori di 13 si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 2a \text{ divide } b.$$

- Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in A.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \sqsubseteq)$.

- Si determini un sottoinsieme di ordine 4 di A che risulti totalmente ordinato.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di $(A, \sqsubseteq)$.

- Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

Esercizio 8. Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali si consideri l'operazione interna $\star$ definita ponendo

$$a \star b = 3ab.$$

- Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, \star)$ è un monoide commutativo.

- Si determini il gruppo U degli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Q}, \star)$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

- Si determinino tutti gli autovalori di A, i corrispondenti autospazi e le relative dimensioni.

- Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si risolva il seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_{11}$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 11:

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 2 \\ 4x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3z = 5 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (3, 2, 1), \qquad B = (-1, -1, 0).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche della retta r per i punti A, B.

- Si scriva l'equazione cartesiana della retta r' per i punti $C = (2, 2, 1)$, $D = (2, 1, 3)$.

- Si stabilisca se le rette r e r' sono parallele, incidenti o sghembe.

Esercizio 12. Nello spazio vettoriale $(\mathbb{Z}_5)^4$ si considerino i sottospazi

$$V = \langle (2,1,0,1), (3,0,0,1), (0,0,0,1) \rangle,$$

$$W = \langle (2,2,0,0), (0,0,1,2), (0,0,1,0) \rangle.$$

Si determini il sottospazio $V \cap W$, la sua dimensione e una sua base.