Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

DOCENTE: C. DELIZIA

Terzo appello — 21 giugno 2016

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 0$ il numero

$$n^2 + n + 1$$

è dispari.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione

$$f : x \in \mathbb{N}_0 \longmapsto (x-1)^2 \in \mathbb{N}_0.$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $f \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ f$ è iniettiva.

- Si determini la controimmagine di $\{0\}$ tramite $f \circ f$:

  $(f \circ f)^{-1}(\{0\}) =$

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_6)$$

è invertibile, e in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x \equiv 6 \pmod{8} \\ 2x \equiv 8 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ |x| \leq 300 \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $A = \{10, 11, 12, \ldots, 30\}$ dei numeri interi compresi tra 10 e 30 si consideri la relazione $\sim$ definita ponendo

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{ la prima cifra di } x \text{ è uguale alla prima cifra di } y\ .$$

- Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza in A.

- Si individui la partizione di A determinata dalla relazione $\sim$.

Esercizio 6. Descrivendo il prodecimento utilizzato, si stabilisca quanti numeri naturali positivi ≤ 200 sono divisibili per uno solo tra 5 e 6.

Esercizio 7. Si consideri l'insieme $S = \{a, b, c, d\}$, e sia $\mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti di S.

- Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(S)$?
- Si denoti con $\subseteq$ la relazione di inclusione insiemistica.
  Nell'insieme ordinato $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ si effettuino i seguenti calcoli:
  $\sup_{\mathcal{P}(S)}(\{a\, ,\, c\}, \{a\, ,\, d\}) =$
  $\inf_{\mathcal{P}(S)}(\{a\, ,\, c\}, \{a\, ,\, d\}) =$
- Sia $A = \{X \in \mathcal{P}(S)\, :\, |X| \leq 2\}$. Quanti e quali sono gli elementi di A ?
- Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di A.
- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \subseteq)$.
- Si stabilisca se $(A, \subseteq)$ è totalmente ordinato, e perché.

Esercizio 8. Si consideri l'insieme $M_2(\mathbb{Z}_4)$ delle matrici quadrate di ordine 2 su $\mathbb{Z}_4$, e si denoti con $\cdot$ il prodotto righe per colonne tra matrici.

- Si dimostri che $(M_2(\mathbb{Z}_4), \cdot)$ è un monoide non commutativo.

- Si dimostri che il sottoinsieme $G = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_4) \, : \, |A| \in \{1, 3\}\}$ è stabile in $(M_2(\mathbb{Z}_4), \cdot)$.

- Si dimostri che $(G, \cdot)$ è un gruppo.

Esercizio 9. Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_3$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 3:

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ b+c+e=2 \\ a+2e=0 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine siano dati i punti

$$A = (0, 1, -2), \qquad B = (1, 1, 3), \qquad C = (0, 2, 4), \qquad D = (1, 2, -3).$$

- Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per A e B.

- Si determinino le equazioni parametriche della retta s passante per C e D.

- Si stabilisca se r ed s sono parallele, incidenti oppure sghembe.

Esercizio 12. Si stabilisca se i tre vettori

$$v_1 = (1, 2, 0), \qquad v_2 = (1, 4, 2), \qquad v_3 = (2, 0, 6)$$

formano una base di $(\mathbb{Z}_7)^3$. In caso contrario si esprima uno di essi come combinazione lineare degli altri due.