

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

PROFF. F. BOTTACIN, C. DELIZIA

Quinto Appello — 21 luglio 2009

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e fare **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

Mat. Discreta e Logica Matem. (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**

Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**

Matematica Discreta vecchio ordinamento (9 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**

Esercizio 1. (a) Si scriva la tavola di verità della seguente formula ben formata e si determini se essa è una tautologia:

$$P = (A \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge B)) \wedge (\neg B \rightarrow A)) \vee B.$$

(b) Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi \neg e \vee .

(c) Si scriva una formula ben formata Q che abbia la seguente tavola di verità:

A	B	C	Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Esercizio 2. Si determinino una formula in forma normale congiuntiva ed una in forma normale disgiuntiva equivalenti alla seguente formula ben formata:

$$(\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg(B \wedge C)) \rightarrow C.$$

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$\forall x A(x) \wedge \exists y B(y) \rightarrow (\exists x C(x) \rightarrow \forall y A(y)).$$

Esercizio 4. Si dimostri che, con A , B e C insiemi arbitrari, si ha:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Esercizio 5. Quanti sono i numeri naturali la cui rappresentazione in base 9 è costituita da due cifre 1, due cifre 2 e una cifra 5?

Esercizio 6. Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri interi $a = 648$ e $b = 924$, e si individuino due interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 7. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \text{ è pari,} \\ -1 & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$$

- Si calcoli:

$$f(3\mathbb{N}) =$$

$$f(4\mathbb{N}) =$$

$$f^{-1}(\{-1, 0, 1\}) =$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Considerata l'applicazione $g : t \in \mathbb{N} \mapsto t + 1 \in \mathbb{N}$, si determini la composta $f \circ g$.

Esercizio 8. Si consideri l'insieme W costituito dai numeri naturali della forma $3h + 1$, con $h \in \mathbb{N}$:

$$W = \{3h + 1 : h \in \mathbb{N}\}.$$

- Si dimostri che W è una parte stabile di (\mathbb{N}, \cdot)
- Si dimostri che W non è una parte stabile di $(\mathbb{N}, +)$.
- Si verifichi che è d'equivalenza la relazione \mathcal{R} definita in W ponendo:

$$(3h + 1)\mathcal{R}(3k + 1) : \iff h + k \in 2\mathbb{N}.$$

- Si calcoli:

$$[1]_{\mathcal{R}} =$$

$$[4]_{\mathcal{R}} =$$

$$[7]_{\mathcal{R}} =$$

- Si verifichi che \mathcal{R} è una congruenza in (W, \cdot) .

- Si scriva la tabella moltiplicativa della struttura quoziente $(W/\mathcal{R}, \cdot)$.

Esercizio 10. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

si determinino, se esistono, una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 11. Dati i seguenti vettori di \mathbb{R}^4

$$v_1 = (1, -1, 2, 3), \quad v_2 = (-1, 1, 3, 3),$$

si verifichi che essi sono linearmente indipendenti. Si determinino poi due vettori v_3 e v_4 tali che i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 siano una base di \mathbb{R}^4 .

Esercizio 12. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (1, 1, 5), \quad B = (2, 2, 1), \quad C = (1, -2, 2), \quad D = (-2, 1, 2).$$

- Si dimostri che i quattro punti assegnati non appartengono allo stesso piano.

- Considerate la retta r passante per A e B e la retta s passante per C e D , si stabilisca se r ed s sono parallele, incidenti oppure sghembe.