Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Quinto Appello — 20 luglio 2010

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**
☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**

Esercizio 1.

- Si consideri la formula ben formata
$$P = A \to \neg B \wedge A.$$
Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è soddisfacibile.

  Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

- Si stabilisca se le formule ben formate $A \vee \neg B$ e $A \to A \vee B$ sono equivalenti.

Esercizio 2. Si scriva una formula ben formata che abbia la stessa tavola di verità di Q:

A	B	C	Q
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$R = \forall x A(x) \wedge \forall y B(y) \to C(z) \vee \exists x B(x).$$

Esercizio 4. Si provi per induzione che per ogni $n \geq 7$ risulta

$$2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + \cdots + 2 \cdot n = n^2 + n - 42.$$

Esercizio 5. Si determinino tutte le eventuali soluzioni intere dell'equazione congruenziale

$$189x \equiv 226 \pmod{263}.$$

Esercizio 6. Si considerino l'insieme $A = \{10, 11, 12, \ldots, 30\}$ dei numeri naturali compresi tra 10 e 30, e la relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ definita in A ponendo

$$a \,\mathcal{R}\, b \iff \text{il prodotto delle cifre di } a \text{ coincide col prodotto delle cifre di } b.$$

- Si calcoli:

  $[10]_{\mathcal{R}} =$

  $[11]_{\mathcal{R}} =$

  $[12]_{\mathcal{R}} =$

  $[18]_{\mathcal{R}} =$

- Quali e quanti sono gli elementi dell'insieme quoziente $A/\mathcal{R}$?

Esercizio 7. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \text{ è pari} \\ 2x & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$$

- Si stabilisca se f è iniettiva.

- Si stabilisca se f è suriettiva.

- Si calcoli:

  $f^{-1}(\mathbb{N}_d) =$

  $f^{-1}(8\mathbb{Z}) =$

Si consideri l'applicazione $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definita ponendo

$$g(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } y \text{ è pari} \\ y^2 - 1 & \text{se } y \text{ è dispari.} \end{cases}$$

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva.

Esercizio 8. Si consideri l'insieme

$$G = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_5) : |A| \neq 0\}\,.$$

Si dimostri che $(G, \cdot)$ è un gruppo non abeliano, dove l'operazione interna $\cdot$ è l'usuale prodotto righe per colonne tra matrici.

Esercizio 9. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 5x + 3y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ \quad\quad x + 2y = 1. \end{cases}$$

Esercizio 10. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Si determinino, se esistono, una matrice invertibile S e una matrice diagonale D tali che $D = S^{-1}AS$.

Esercizio 11. Si estragga una base dal seguente insieme di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\{(0,1,1),(1,2,1),(1,0,2),(0,0,1)\}\,.$$

Esercizio 12. Nello spazio affine tridimensionale si considerino il piano π di equazione cartesiana

$$\pi \;:\; x+y-z=0$$

e la retta r di equazioni parametriche

$$r \;:\; \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=2+t \end{cases}$$

con $t\in\mathbb{R}$. Si determini il punto P di intersezione tra la retta r e il piano π.