Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Quinto Appello — 12 luglio 2011

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Si dimostri che

$$12\mathbb{N} \,\dot\cup\, 18\mathbb{N} = (12\mathbb{N} \cup 18\mathbb{N}) \setminus 36\mathbb{N},$$

dove il simbolo $\dot\cup$ denota l'unione disgiunta tra insiemi.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è dispari} \\ \\ \dfrac{x}{2} & \text{se } x \text{ è pari.} \end{cases}$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $f \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ f$ è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ f$ è suriettiva.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7).$$

Si dimostri che A è invertibile e se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ si consideri la relazione

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

Motivando le risposte, si stabilisca se $\mathcal{R}$ è:

- riflessiva
- simmetrica
- asimmetrica
- transitiva

Esercizio 5. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 10x \equiv 4 \pmod{12} \\ 8x \equiv 7 \pmod{11} \\ 6x \equiv 8 \pmod{10} \\ |x| \leq 400. \end{cases}$$

Esercizio 6. Si considerino l'insieme $\mathbb{Z}_4$ e l'operazione interna $\star$ definita ponendo

$$a \star b \, = \, 3ab.$$

- Si scriva la tavola di moltiplicazione della struttura algebrica $(\mathbb{Z}_4, \star)$.

- Specificandone l'elemento neutro, si dimostri che $(\mathbb{Z}_4, \star)$ è un monoide commutativo.

Esercizio 7. Sia A un insieme finito di ordine 7.

- Quanti sono i sottoinsiemi di A ?

- Quanti sono i sottoinsiemi di A di ordine pari?

- Quante sono le applicazioni non suriettive di A in A ?

Esercizio 8. Nell'insieme $A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ si consideri la relazione d'ordine $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$(a,b) \sqsubseteq (c,d) \iff a \leq c \text{ e } b \leq d.$$

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(A, \sqsubseteq)$.

- Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.

- Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

- Si determinino gli eventuali autovalori di A su $\mathbb{Q}$ e i relativi autospazi.

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 10. Si considerino gli spazi vettoriali razionali $\mathbb{Q}^3$ e $\mathbb{Q}^5$, e l'applicazione

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \longmapsto (x + y \, , \, 0 \, , \, x + y + z \, , \, y \, , \, x + z) \in \mathbb{Q}^5.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini l'immagine W di f.

- Si determinino la dimensione di W e una sua base.

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale si considerino il piano π di equazione

$$\pi \; : \; x + y - 3z = 0$$

e la retta r di equazioni parametriche

$$r \; : \; \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

- Si determini il punto P di intersezione tra la retta r e il piano π.

- Data la retta r' passante per i punti

  $$A = (1, 0, 1), \qquad B = (-2, 1, 0),$$

  si stabilisca se r è ortogonale a r'.

Esercizio 12.

- Si scriva la tavola di verità della formula ben formata

$$P = A \wedge B \vee \neg A \to \neg B.$$

- Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

- Si determini una formula in forma normale congiuntiva equivalente a P.

- Indicando con una crocetta la risposta scelta, si determini il valore di verità di ciascuna delle seguenti proposizioni:

P_1 : se 3 è pari allora Bora Bora si trova nell'Oceano Atlantico;
☐ VERO ☐ FALSO

P_2 : se M.C.D.$(18, 6) = 3$ allora 3 è dispari;
☐ VERO ☐ FALSO

P_3 : se $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è un monoide allora $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è un gruppo;
☐ VERO ☐ FALSO

P_4 : se 123456789 è primo allora $7 \equiv 2 \pmod 5$.
☐ VERO ☐ FALSO